Der Punkt: nach Euklid und anschaulich

Bernhard Blank

Aufrufbar unter: www.didaktikmat2chem.de [1]

Kurzartikel B

Fassung 3.11

[1] Titel der Website: Erklärungen in Mathematik, Physik und Physikalischer Chemie

Der Punkt: nach Euklid und anschaulich

Welche Ausdehnung hat ein Punkt und wie müsste man ihn definieren, damit man ihn in jedem Raumbereich auch zeichnen kann? Hier werden zwei unterschiedlich existierende Punktvorstellungen diskutiert und dazu Beispiele aus Mathematik und Physik genannt. So werden Koordinatenpunkte, Punkte aus der Physik mit einer Ausdehnung und die Punktmassen, ebenfalls ein Begriff aus der Physik, behandelt.

Verwendete Begriffe und Namen: Euklid, Koordinatenpunkt, Massenpunkt, Punkt, anschaulicher und euklidischer bzw. mathematischer Punktbegriff, Punktmasse.

Nach dem griechischen Mathematiker **Euklid** ist der Punkt bereits seit dem Altertum „etwas, was keine Teile hat“. Der Punkt versteht sich somit als eine Größe, die keine Ausdehnung besitzt, und den daraus resultierenden Punktbegriff nenne ich den **euklidischen** bzw. **mathematischen Punktbegriff**. Er macht das aus, was man in der Mathematik unter einem Punkt versteht. Daneben existiert aber noch ein anderer Punktbegriff, der bei seiner zeichnerischen Darstellung zum Tragen kommt, da diese stets eine Ausdehnung erfordert. Ihn nenne ich den **anschaulichen Punktbegriff**. Er symbolisiert für gewöhnlich das, was wir im Alltag unter einem Punkt verstehen.

Doch zuerst zum Punktbegriff nach Euklid und zu seinem Auftreten in der Mathematik:
So kann man, wenn auch nicht so bekannt, einen Koordinatenpunkt als euklidischen Punkt auffassen. Dort wird er zumeist durch eine Zahl (oder ein Zahlenpaar/ein Zahlentripel) charakterisiert, denn das ist möglich, da Zahlen, wenn sie unendlich viele Stellen besitzen – das sind schon die reellen Zahlen -, auch die Eigenschaft haben, dass sie keine Ausdehnung besitzen. Zwischen solchen Zahlen und den Koordinatenpunkten besteht deshalb eine Übereinstimmung. Derjenige, der sich für den Zusammenhang interessiert, sei auf die Aufgabe am Schluss dieses Artikels hingewiesen. Sie ist zugleich ein Beweis dafür, dass Koordinatenpunkte keine Ausdehnung besitzen.
Als Beispiel für einen euklidischen Punkt als Koordinatenpunkt wird nun eine kleine mathematische Berechnung durchgeführt, bei der man Zahlen durch Punkte in einem Koordinatensystem versinnbildlicht, das hier 1-dimensional sein soll. Dabei handelt es sich um eine Kontobewegung, bei der von einem Guthaben ein bestimmter Betrag abgezogen wird. Abb. 1 demonstriert den Sachverhalt, bei der auf einem Zahlenstrahl das Guthaben in Höhe von 67,- € um den Betrag von 45,50 € vermindert wird. Eine solche Darstellung

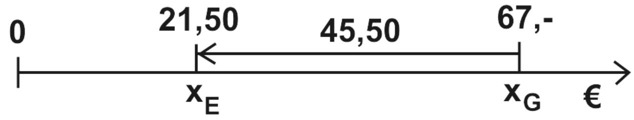


Abb. 1

kann man als ein Koordinatensystem mit den Koordinatenpunkten $x_G = 67$,- (G für Guthaben) und $x_E = 21{,}50$ (E für Endsumme) ansehen. Weiterhin kann man die Zahlen 67,- ; 45,50 und 21,50 , wenn man in reellen Zahlen denkt, sicher als 67,0000...; 45,5000... und 21,5000... deuten, nur lässt man die unendlich vielen Nullen in der Regel weg. Auf diese Weise stehen die Zahlen für euklidische Punkte, hier in Form von Koordinatenpunkten (siehe dazu wieder den Beweis am Ende des Artikels), die 1-dimensional sind. Ein solches Beispiel mit 1 Dimension lässt sich natürlich leicht auf 2 und mehr Dimensionen erweitern, was dann auch für die zugehörigen Koordinatenpunkte gilt. Die Koordinatenpunkte stellen danach euklidische Punkte dar, haben also keine Ausdehnung.

Neben diesem euklidischen Punktbegriff existiert des Weiteren noch die Vorstellung eines Punktes als eine Größe, die etwas „ausmacht“. Wer einen Punkt grafisch darstellen will, geht von einem Punkt als Kreisfläche (im Idealfall) aus, die jedoch gewöhnlich sehr klein ist. Dieser Punkt hat eine Ausdehnung, weshalb ich ihn hier als **anschaulichen Punkt** bezeichnen will. Das Problem bei diesem Punktbegriff ist, dass bei Vorgabe seiner Größe ein anderer herkommen kann und diesen für seinen Raumbereich als zu groß ansieht. Dies mag Euklid damals bewogen haben, den Punkt so zu definieren, dass er keine Ausdehnung besitzt und deshalb „immer passt". Leider geht dabei das Moment der Anschauung völlig verloren, denn was keine Ausdehnung hat, kann man auch nicht sehen.

Als Euklid seinen Punktbegriff vorstellte, gab es sicher noch nicht den Begriff der Konvergenz, der eher ein Kennzeichen der Differential- und Integralrechnung ist. Auf diesen aufbauend lässt sich ein Punktbegriff konstruieren, der a) anschaulich begreifbar ist und b) auch auf jeden Raumbereich anwendbar ist: Sei dieser Punkt durch eine Kreisfläche mit dem Radius r charakterisiert, so kann man ihn übergeordnet als **„Stadium" des Grenzprozesses** [a] $r \to 0$ auffassen, wobei man je nach Anforderung an den Raumbereich ein geeignetes Stadium auswählt. So würde ihn ein Architekt [b] größenordnungsmäßig anders auf seinen Zeichnungen wählen, als es ein Molekularbiologe [b] oder ein Quantenphysiker [b] in atomaren Bereichen tun würde.
Bei dieser anschaulichen Punktdefinition macht man sich die Tatsache zunutze, dass ein Grenzprozess, der hier vorliegt, seinen zugehörigen Grenzzustand nie (!) erreicht und damit auch nie zu null wird, wodurch dieser Punkt an jeden Raumbereich angepasst werden kann (s. dazu den Artikel unter Fußnote [a].

<u>Zusammenfassend lässt sich nun sagen:</u> Der euklidische Punktbegriff ist gut, wenn mathematische Verhältnisse in Form von Koordinatenpunkten und -systemen ausgedrückt werden, der anschauliche, wenn ein Punkt grafisch dargestellt wird (wobei wir es in der Ebene dann mit zwei Dimensionen zu tun haben).

Will man übrigens eine Beziehung zwischen dem so definierten anschaulichen und dem euklidischen Punktbegriff herstellen, so lässt sich mit den Begriffen Grenzprozess [a] und Grenzzustand [a] sogar Folgendes formulieren: Der Grenzprozess $r \to 0$ konvergiert gegen den euklidischen Punkt als Grenzzustand, wobei ein Stadium r des Grenzprozesses $r \to 0$ für den anschaulichen Punkt steht, so wie es für einen Raumbereich erforderlich ist.
Mathematisch soll aber nicht verschwiegen werden, dass das, was ich hier als Grenzprozess $r \to 0$ bezeichnet habe, nichts anderes als eine Kreisfläche ist, die gegen null konvergiert.

<u>Anwendung des euklidischen Punktbegriffs in der theoretischen Physik:</u>
Ein zentraler Begriff in der klassischen Mechanik [c] ist der Begriff des **Massenpunktes** bzw. der **Punktmasse**. Bei diesem stellt man sich die gesamte Masse eines Körpers in einem Punkt konzentriert vor. Für den Umgang mit solchen Massenpunkten gibt es in der Physik nachgenannte Alternativen:
a) Die praktische bzw. experimentelle.
Dabei bestimmt man den Ort eines Massenpunktes in einem Experiment über die Messergebnisse (s. das Beispiel in Abb. 2 anhand des freien Falls einer Kugel). Da eine solche Ortsbestimmung für das Zentrum der Kugel, dem Massenpunkt,

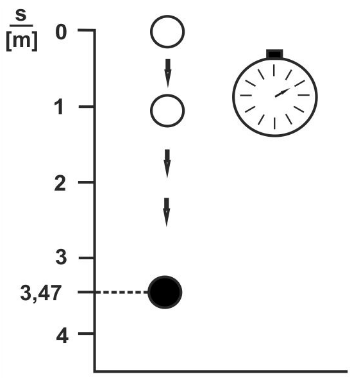


Abb. 2

[a] Zu den Begriffen Grenzprozess, Stadium eines Grenzprozesses und Grenzzustand siehe den Artikel: www.didaktikmat2chem.de/Das_Differential_-_einmal_konsequent anschaulich_gedacht.pdf
[b] Entsprechendes gilt natürlich auch für die weiblichen und diversen Berufsbezeichnungen.
[c] Siehe das Glossar in www.didaktikmat2chem.de/Anhang.pdf

immer nur auf endlich viele Stellen nach dem Komma möglich ist (in Abb. 2 zu einer Zeit t auf $s = 3,47m$), ist der Ort dieses Massenpunktes nur bis zur letzten gemessenen Stelle nach dem Komma genau. (Experimentelle Bestimmungen liefern ja generell nur Messergebnisse mit endlich vielen Stellen.)
b) Die theoretische.
Anhand der physikalischen Gesetze für den freien Fall lässt sich das Verhalten der Kugel in Abb. 2 auch theoretisch bzw. mathematisch durchrechnen. Diese Berechnung ist in der Theorie immer eine ideale und kann im reellen Zahlenraum stattfinden. Für den jeweiligen Ort des Massenpunktes zur Zeit t im 3-dimensionalen Raum erhält man so ein Zahlentripel mit reellen Zahlen. Da diese jedoch, mathematisch betrachtet, unendlich viele Stellen nach dem Komma besitzen, ist ein solcher Massenpunkt nach dem Beweis in der unten stehenden Aufgabe einer ohne Ausdehnung und somit ein **euklidischer Punkt**.
In der theoretischen Physik haben Massenpunkte in idealisierten Berechnungen demnach keine (!) Ausdehnung.

Anwendung des anschaulichen Punktbegriffs in der Physik:

Lässt man in einem physikalischen Experiment Licht über einen kleinen Spalt auf eine fotografische Platte auftreffen, so erzeugt der Spalt sog. huygenssche Elementarwellen, die auf den Schirm Sch gelangen (s. Abb. 3). Das Licht erzeugt dabei durch seine Photonen kleine, schwarze Punkte auf dem Schirm, die durch eine chemische Reaktion bedingt sind und die eine Ausdehnung besitzen. Diese Punkte erzeugen mit ihrer Intensität I die Verteilung V am Schirm.

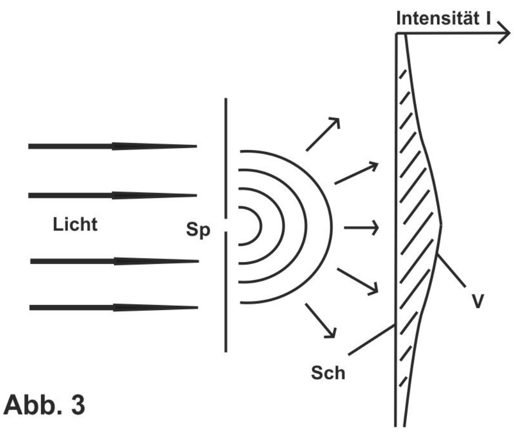
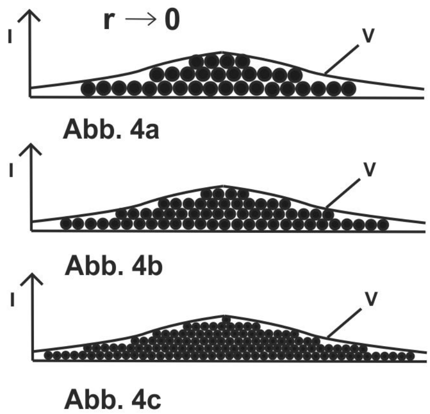


Abb. 3

Da man die Punkte „sehen“ kann, käme hier also der **anschauliche Punktbegriff** zum Tragen.

Lässt man das Licht nun sehr lange auf den Schirm auftreffen, so entsteht – zumindest theoretisch - das Problem, dass die Punkte sich immer mehr überlappen bzw. überdecken. Irgendwann würde man dann nur noch eine einheitlich schwarze Fläche erhalten und gar keine „Punkte“ mehr sehen. Zumindest wird die Menge der nicht überlappten Flächen zunehmend kleiner. Um diesem Problem zu entgehen, kann man diese Flächen nun theoretisch in Form eines Kunstgriffs als „Stadium“ eines Grenzprozesses $r \to 0$ auffassen, das umso mehr gegen 0 geht, je größer die Anzahl N der Punkte ist. Ist das Produkt N mal Kreisfläche πr^2 dieser Punkte fest eingestellt (es kann z. B. $N \cdot \pi r^2 = 50mm^2$ sein), so erhält man das, was die Abb. 4a-c wiedergeben: Je größer die Anzahl N der Punkte ist, desto mehr nähert sich ihre Gesamtfläche dem Graphen der Verteilung V als einem Grenzzustand, bzw. im Grenzfall geht für $N \to \infty$ die Fläche der Punkte mit ihren Zwischenräumen in diese exakte grafische Verteilung V über. Siehe dazu auch die Verteilung V in Abb. 3.



Anmerkung: Natürlich sind die Punkte im Experiment zuerst mehr oder weniger verteilt auf dem Schirm Sch (s. Abb. 5a). Man kann sie aber durch eine vertikale Verschiebung leicht in eine Form überführen, die den Abb. 4a-c entspricht (s. Abb. 5b).

Aufgabe

Wieso hat eine Zahl (ein Zahlenpaar oder ein Zahlentripel) mit unendlich vielen Stellen keine Ausdehnung?

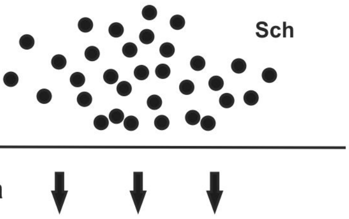


Abb. 5a

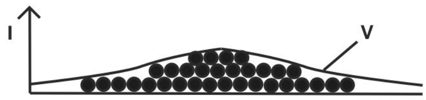


Abb. 5b

Beweis durch Widerspruch:
Es wird angenommen, eine Zahl mit unendlich vielen Stellen hat eine Ausdehnung. Dann gibt es eine n-te Stelle mit $n \geq 2$, für die gilt: Alle Stellen links von dieser Stelle sind fest vorgegeben. Die n-te Stelle hat eine Ausdehnung z mit maximalem z von $z \leq 9,\overline{9}$. Sei z. B. $n = 5$, die Stellen links von n seien 54,23 (macht zusammen 4 Stellen), so kann die 5. Stelle zwischen $54,225\overline{0}$ und $54,234\overline{9}$ liegen. Hat der Punkt eine Ausdehnung, die diese Werte unter- bzw. überschreitet, so ist die 4. Stelle abzuändern. Dies ist aber nicht zulässig, da diese ja schon fest vorgegeben ist. Die Ausdehnung beträgt im Beispiel so maximal $54,234\overline{9} - 54,225\overline{0}$, also an der 5. Stelle von $z = 9,\overline{9}$. Da jedoch die Zahl unendlich – also nicht endlich - viele aufeinanderfolgende und **fest** vorgegebene Stellen hat, wird man nie eine solche n-te Stelle finden, die eine Ausdehnung besitzt.
(Widerspruch zur Annahme).
Was für den 1-dimensionalen Punkt auf der Zahlengeraden gilt, trifft entsprechend auf ein Zahlenpaar für einen Punkt in der Ebene etc. zu.
Besitzt eine Zahl mit unendlich vielen Stellen bereits an der 1. Stelle eine Ausdehnung, ist also $n = 1$, so kann man nicht sagen, dass man es noch mit dem Vorliegen einer Zahl zu tun hat, sondern muss davon sprechen, dass es eine reine Strecke im 1-dimensionalen Fall bzw. bei einem Zahlenpaar eine reine Fläche im 2-dimensionalen Fall etc. ist (trivialer Fall).
Folglich hat eine Zahl mit unendlich vielen Stellen keine Ausdehnung.

q.e.d.