

Das gaußsche Wellenpaket: Herleitung und Betrachtung

Bernhard Blank

Veröffentlicht unter: www.didaktikmat2chem.de¹

Artikel I

Fassung 4.1

© Copyright April 2018

Dieser Artikel ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen und Mikroverfilmungen. Die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen ist nur insofern erlaubt, als es für den Dienst von Suchmaschinen und deren Zugriffsmöglichkeiten via Internet erforderlich ist. Es wird untersagt, diesen Artikel über Sharehoster oder anderen Plattformen Dritten zugänglich zu machen.

Eine gewerbliche Nutzung ist nicht zulässig.

¹ Titel der Website: Erklärungen in Mathematik, Physik und Physikalischer Chemie

Das gaußsche Wellenpaket: Herleitung und Betrachtung

Die mathematische Konstruktion des gaußschen Wellenpakets durch harmonische Wellen und sein zeitlicher Verlauf.

Kleine, lokale Größen spielen eine große Rolle im Verständnis des Mikrokosmos. So kann man Atome und Moleküle als lokalisierte Zustände auffassen, da sie nur in einem engen örtlichen Bereich existieren. Will man ganz allgemein physikalische Aussagen über solche Zustände erhalten, dann bedient man sich in der Physik (und hier speziell der Quantenmechanik) zunächst des gaußschen Wellenpakets. So kann dieses für eine Ortsdarstellung von Teilchen im Mikrokosmos als auch für eine Impulsdarstellung solcher Teilchen formuliert werden. (Wenn daraufhin ein Darstellungswechsel zwischen den physikalischen Größen, wie z.B. vom Impuls- in den Ortsraum, vorgenommen wird, so gelangt man in der Quantenmechanik zu ganz fundamentalen Beziehungen, die für jede Berechnung nach ihr von großer Bedeutung sind.) In diesem Zusammenhang nehmen Betrachtungen über das gaußsche Wellenpaket eine Schlüsselstellung ein.

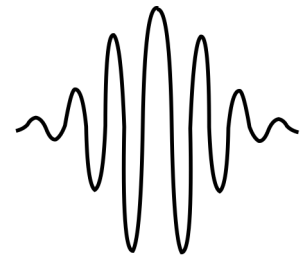


Abb. 0.1

Was ein gaußsches Wellenpaket genau ist (s. auch Abb. 0.1) und wie es von harmonischen Wellen ausgehend konstruiert werden kann, ist das Thema dieses Artikels. Hierbei wird hauptsächlich der Fall behandelt, bei dem keine Dispersion vorliegt, man es also streng genommen mit Verhältnissen im Vakuum zu tun hat. Jeder Schritt dieses Artikels wird parallel auf die Gültigkeit der allgemeinen Wellengleichung überprüft. Eine anschauliche Betrachtung des gaußschen Wellenpakets zu verschiedenen Zeiten und seines Trägers rundet den Artikel ab.

Verwendete Begriffe und Namen: Dispersion, Gauß, Modulation, gaußsche Verteilung, allgemeine Wellengleichung, Wellenpaket, gaußsches Wellenpaket.

Inhalt

I.1 **Überblick** S. 2

I.2 **Herleitung eines Integralausdrucks aus der Überlagerung harmonischer Wellen** S. 2

Verwendete Begriffe: Superpositionsprinzip.

I.3 **Das gaußsche Wellenpaket** S. 7

Verwendete Begriffe: Gaußsche Glockenkurve, Modulation, Normalverteilung, Signal, Träger, gaußsche Verteilung, gaußsches Wellenpaket.

U.a. wird behandelt: Modulation des Integralausdrucks in I.2 mit einer gaußschen Verteilung zum gaußschen Wellenpaket.

I.4 **Das gaußsche Wellenpaket zu verschiedenen Zeiten** S. 9

Verwendete Begriffe: Dispersion, Prisma.

U.a. wird angeschnitten: Das Zerfließen des gaußschen Wellenpakets.

| | |
|--|-------|
| I.5 Eine anschauliche Betrachtung des Trägers | S. 12 |
| I.6 Lösungen der allgemeinen Wellengleichung | S. 14 |
| I.7 Zusammenfassung | S. 17 |

I.1 Überblick

Eine Überlagerung von unendlich vielen harmonischen Wellen führt auf einen **Integralausdruck** der Form

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad (I-1.1)$$

dessen Herleitung das Thema von I.2 ist. Durch **Modulation** genau dieses Integralausdrucks mit einer **gaußschen Verteilung** gelangen wir zu einem Wellengebilde, das als **gaußsches Wellenpaket** bezeichnet wird (s. I.3). Anschließend erfolgt seine Betrachtung zu verschiedenen Zeiten, so zum Anfangsstadium mit $t = 0$ und generell zu einer bestimmten Zeit t , dies hauptsächlich aber nur für den Fall ausbleibender Dispersion (s. I.4). Eine anschauliche Diskussion der Funktion $f(k_0, x) = A \cdot \cos(k_0 x)$ führt uns zu einem Verständnis, wie der Träger des gaußschen Wellenpakets sich bei verschiedenen Größenordnungen verhält (s. I.5).

Alle in diesem Artikel aufgeführten Formen von Wellenbeschreibungen werden mit der allgemeinen Wellengleichung in Beziehung gesetzt, was zu guter Letzt auch mit dem gaußschen Wellenpaket geschieht. Diese speziellen Berechnungen befinden sich in I.6 und können beim ersten Lesen übersprungen werden, was den zentralen Gedankengang besser heraushebt.

I.2 Herleitung eines Integralausdrucks aus der Überlagerung harmonischer Wellen

In meinem Artikel „Superposition und Interferenz von Wellen“¹ hatte ich erläutert, wie harmonische Wellen physikalisch durch den Ausdruck

$$y(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (\text{s. dort (H-2.1)}) \quad (I-2.1)$$

beschrieben werden können. Sollen mit solchen Wellen auch Interferenzerscheinungen richtig wiedergeben werden, so ist eine komplexe Erweiterung gemäß des Ausdrucks

$$y(x,t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{s. dort (H-3.1)}) \quad (I-2.2)$$

vonnöten.

Wellen dieses Typs lassen sich überlagern und aufgrund des **Superpositionsprinzips** wird für ein solches Wellengebilde der allgemeine Ausdruck

¹Siehe www.didaktikmat2chem.de/Superposition_und_Interferenz_von_Wellen.pdf

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^n y_j(x,t) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot e^{i(k_j x - \omega_j t)} \quad (\text{s. dort (H-4.4)}) \quad (I-2.3)$$

erhalten. Voraussetzung bei diesem Wellengebilde für eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung soll hier sein, dass sich die Einzelwellen

$$y_j(x,t) = A_j \cdot e^{i(k_j x - \omega_j t)} \quad (\text{s. dort (H-7.11)}) \quad (I-2.4)$$

alle mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegen.

In diesem Artikel möchte ich zunächst mit einem Wellengebilde beginnen, das durch den Integralausdruck

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (\text{s. (I-1.1)})$$

wiedergegeben wird. Ganz analog zu (I-2.3) soll dafür gezeigt werden, dass dieses Gebilde mit der allgemeinen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{s. dort (H-2.4)}) \quad (I-2.5)$$

vereinbar ist. Später werden wir dann den Koeffizienten A modifizieren, was daraufhin die Formel für ein gaußsches Wellenpaket ergibt.

Für die Herleitung von (I-1.1) gehen wir von einer Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen $y_j(x,t)$ aus, die alle die Form

$$y_j(x,t) = A_j \cdot e^{i(k_j x - \omega_j t)} \quad (\text{s. (I-2.4)})$$

besitzen und die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit aufweisen sollen. Durch geeignete Überlagerung und anhand der Ermittlung des Grenzzustandes können wir daraus dann unseren Integralausdruck (I-1.1) erhalten.

Für die Ableitung von (I-1.1) beschränken wir uns nun auf die Funktion

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \cos(kx - \omega t) dk \quad (I-2.6)$$

und ergänzen diese später mit den imaginären Gliedern $A \cdot i \cdot \sin(kx - \omega t) dk$, wobei wir über die eulersche Gleichung

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta \quad (I-2.7)$$

wieder auf Beziehung (I-1.1) stoßen.

Um diese Ableitung führen zu können, gehen wir von Gleichung (I-2.3) und gemäß (I-2.7) nur vom Realteil jedes einzelnen seiner n Glieder aus. Dieser Realteil hat für ein Glied die Form

$$y_j(x, t) = A_j \cdot \cos(k_j x - \omega_j t). \quad (I-2.8)$$

In einem ersten Schritt greifen wir zu einem Trick, indem wir $A_j = A_j^\Delta \cdot \Delta k$ setzen, wobei Δk beliebig angesetzt wird. Damit ergibt sich aus (I-2.8):

$$y_j(x, t) = A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot \Delta k \quad (I-2.10)$$

Mit $y_j(x, t) = y(k_j, x, t)$ ist

$$y(k_j, x, t) = y_j(x, t) = A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot \Delta k = A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - c \cdot k_j t) \cdot \Delta k, \quad (I-2.11)$$

wobei $c = \frac{\omega_j}{k_j}$.

Speziell für $t = 0$ lässt sich formulieren (dazu betrachten wir den Anfangszustand der Welle $y(k_j, x, t)$):

$$y(k_j, x, 0) \equiv y(k_j, x), \quad (I-2.12)$$

sodass sich $y(k_j, x) = A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x) \cdot \Delta k$ ergibt. (I-2.13)

Summieren wir diese Glieder miteinander auf, kann daraus eine Treppenstufensummenfunktion für ein beliebiges x , wie sie Abb. 2.1 wiedergibt, konstruiert werden.

Dabei sei

$$A_1^\Delta = A_2^\Delta = \dots = A_n^\Delta = A^\Delta \quad \text{und} \quad k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]. \quad (I-2.14)$$

n geht hier aus der Anzahl der Glieder bzw. „Treppenstufen“ in den Grenzen von a bis b hervor, s steht für die Anzahl der Treppenstufen innerhalb einer Wellenlänge. Für die Summe der Flächen ergibt sich so unsere Treppenstufensummenfunktion zu:

$$y(x, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x) = \sum_{j=1}^n A^\Delta \cdot \cos(k_j x) \cdot \Delta k = \sum_{j=1}^n A^\Delta \cdot \cos \left(\left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k] \cdot x \right) \cdot \Delta k \quad (I-2.15)$$

Wir erhalten die Funktion $y(x, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x)$ mit der impliziten Breite $\Delta k = \frac{2\pi}{s}$ für eine

Treppenstufe. Lassen wir in dieser $s \rightarrow \infty$ gehen, so wird Δk immer kleiner, d.h., die Treppenstufen rücken immer mehr zusammen. Ein größeres j erzeugt k_j -Werte, die immer weiter rechts auf der Abszisse liegen.

Wie Abb. 2.1 zeigt, nähert sich diese Treppenstufensummenfunktion der Fläche unter der Cosinus-Funktion $y(k, x)$ an, wenn Δk zunehmend kleiner ausfällt. Das lässt sich ausnutzen, um einen Grenzprozess durchzuführen, der unserem Ziel, eine Formel für (I-1.1) zu finden, näher kommt, und worauf gleich eingegangen wird.

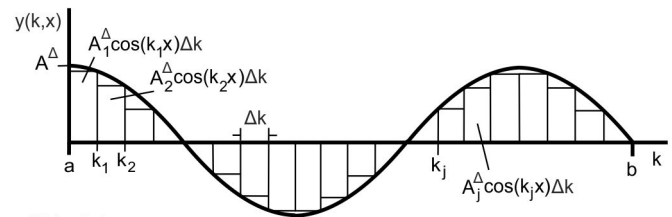


Abb. 2.1

Ist t von 0 verschieden und interessieren wir uns für eine Zeitabhängigkeit dieses Wellenbildes, so können wir wieder mit $\omega_j = c \cdot k_j$ und unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit c für jedes einzelne seiner Glieder (I-2.11) besteht, für die Summe der Einzelwellen sogar folgenden erweiterten Ausdruck annehmen:

$$y(x, t, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x, t) = \sum_{j=1}^n A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot \Delta k$$

$$= \sum_{j=1}^n A^\Delta \cdot \cos\left(\left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j\right)[k] \cdot x - \omega_j t\right) \cdot \Delta k \quad (I-2.16)$$

Jedes der Glieder von (I-2.16) ist eine Lösung der Wellengleichung, und damit ist auch (I-2.16) Lösung der allgemeinen Wellengleichung. (Siehe dazu das Unterkapitel I.6, Abschnitt a.)

In einem Grenzprozess können wir jetzt $\Delta k \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ in den Grenzen von a bis b gehen lassen, um die Cosinus-Funktion in Abb. 2.1 zu erhalten. Wir bilden dazu zuerst für $t = 0$ den Ausdruck

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x) \cdot \Delta k, \quad (I-2.17)$$

wobei wieder $k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j\right)[k]$ ist.

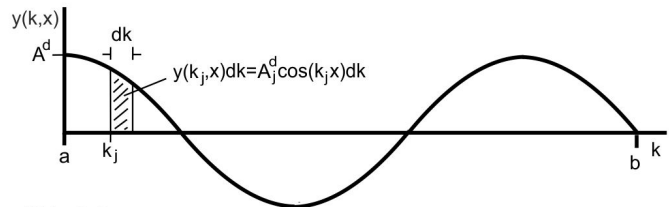


Abb. 2.2

Für den zugehörigen Grenzzustand (d.i. also der „Limes“) bekommen wir ein

Integral in den Grenzen von a bis b . Dabei wird Δk durch das Differential dk ersetzt, was für den Grenzzustand steht. Fassen wir das dk als eine endliche Größe auf¹, so kommen wir folglich von Abb. 2.1 zu Abb. 2.2. Ersetzen wir nun nicht in (I-2.8) (hier ohne den zeitabhängigen Anteil) A_j durch $A_j^\Delta \cdot \Delta k$, sondern A_j durch $A_j^d \cdot dk$, können wir wie Gleichung (I-2.13) formulieren:

$$y(k_j, x) = A_j^d \cdot \cos(k_j x) \cdot dk. \quad (I-2.18)$$

Hier ist dk (wie Δk) endlich und A_j^d kann nach $A_j = A_j^d \cdot dk$ entsprechend gewählt werden.

Durch Aufsummierung über alle n und mit $A_1^d = A_2^d = \dots = A_n^d = A^d$ gewinnen wir daraus analog zu (I-2.15) die Summe

$$y(x, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x) = \sum_{j=1}^n A^d \cdot \cos(k_j x) \cdot dk \quad (I-2.19)$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als das Integral

$$y(x) = \int_a^b A^d \cdot \cos(kx) dk, \quad (I-2.20)$$

¹ Dies erfolgt in Anlehnung an Cauchy, wobei es vom Belieben des Darstellers abhängt, welche Breite er dieser gibt. Siehe dazu auch meinen Artikel www.didaktikmat2chem.de/Das_Differential_-_einmal_anders_gedacht.pdf, dort das Unterkapitel: „Zum Differentialbegriff“.

wobei die Anzahl der Flächen in den Grenzen von a bis b genau n und damit ganzzahlig ist.¹ Erweitern wir (I-2.18) wieder um den zeitabhängigen Anteil $\omega_j t$ gemäß (I-2.11), in der A_j^Δ durch A_j^d und Δk durch dk ausgetauscht wird, so wird für ein Glied die Gleichung

$$y(k_j, x, t) = y_j(x, t) = A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk = A_j^d \cdot \cos(k_j x - c \cdot k_j t) dk \quad (I-2.21)$$

erhalten.

Mit $k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]$ können wir ganz analog zu (I-2.16) zeigen, dass (wieder unter der Voraussetzung gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit aller seiner Glieder) auch

$$y(x, t, n) = \sum_{j=1}^n A_j^d \cdot \cos \left(\left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k] \cdot x - \omega_j t \right) \cdot dk \quad (I-2.22)$$

die allgemeine Wellengleichung löst. Siehe dazu das Unterkapitel I.6, Abschnitt b). Gleichung (I-2.22) ist aber erneut nichts anderes als das Integral

$$y(x, t) = \int_a^b A^d \cdot \cos(kx - \omega t) dk \quad (I-2.23)$$

(wenn $A_1^d = A_2^d = \dots = A_n^d = A^d$ und $\left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k] = k_j$). Letzteres ist nach Abb. 2.2 eine

Aufsummierung aller Flächen $y(k_j, x) dk$ mit $y(k_j, x) dk = A_j^d \cdot \cos(k_j x) dk$ in den Grenzen von a bis b (s. Abb. 2.2), nur, dass hier zur Abb. 2.2 der zeitabhängige Anteil $\omega_j t$ noch hinzugesetzt wird (was wir bei gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit aller seiner Glieder ohne Weiteres tun können). Für dieses Integral ergibt sich mit $A^d = A$:

$$y(x, t) = \int_a^b A \cdot \cos(kx - \omega t) dk \quad (I-2.24)$$

Im Unterkapitel I.6, Abschnitt c), wird noch darauf eingegangen, wie (I-2.23) statt in den Grenzen von a bis b mit endlich vielen Gliedern auf den Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ mit unendlich vielen Gliedern erweitert werden kann. So kommen wir zu der Gleichung

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \cos(kx - \omega t) dk \quad (I-2.25)$$

Auf diese Weise haben wir schließlich einen Integralausdruck gefunden, der durch Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen zustande gekommen ist und der außerdem die allgemeine Wellengleichung löst.

¹ In meinem Artikel www.didaktikmat2chem.de/Das_Differential_-_einmal_anders_gedacht.pdf, dort das Unterkapitel: „Zum Differentialbegriff“, habe ich auch die Möglichkeit erörtert, dass die Anzahl der Flächen in den Grenzen von a bis b reell sein kann, was auch möglich ist. Der Einfachheit halber soll sie hier aber ganzzahlig sein.

Berücksichtigen wir in gleicher Weise auch die imaginären Glieder, die nach

$$y_j(x, t) = A_j \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) + i \cdot A_j \cdot \sin(k_j x - \omega_j t) \quad (I-2.26)$$

entsprechend ergänzt werden können (dazu werden für den Imaginärteil die gleichen Betrachtungen durchgeführt, wie wir es für den Realteil gemacht haben), so gelangen wir zusammenfassend mit der eulerschen Gleichung (I-2.7) auf die zugehörige e-Funktion und somit auf den Ausdruck

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (\text{s. (I-1.1)})$$

als die Summe aller seiner Glieder, der ebenso unsere allgemeine Wellengleichung löst.

I.3 Das gaußsche Wellenpaket

Auf einen physikalisch besonders interessanten Fall gelangen wir, wenn unsere so gewonnene Funktion

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (\text{s. (I-1.1)})$$

mit einer **gaußschen Verteilung** bzw. einer **Normalverteilung moduliert** wird. Damit kommen wir zur eigentlichen Thematik dieses Artikels: Denn als gaußsche Verteilung wird eine Verteilung bezeichnet, die durch den Graphen

$$g(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (I-3.1)$$

gegeben ist (s. Abb. 3.1). Diesem wird auch aufgrund seines Aussehens der Name **gaußsche Glockenkurve** gegeben. Hier drückt der Wert $-\mu$ die Verschiebung zur Ordinaten aus. Diese liegt umso mehr nach rechts auf der Abszisse, je negativer $-\mu$ (bzw. je positiver μ) ist. Die

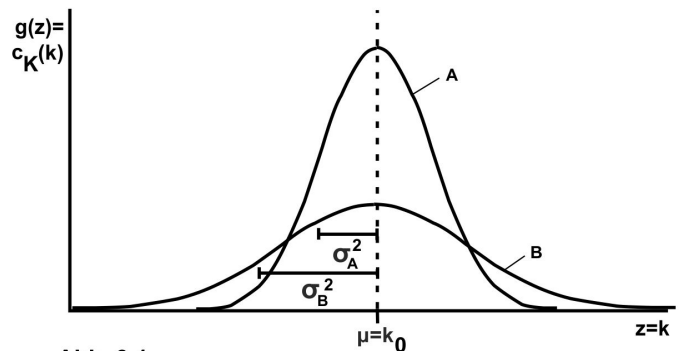


Abb. 3.1

Breite der Verteilung wird darin mittels des Terms $2\sigma^2$ wiedergegeben. Sie gibt den Abstand von Wendepunkt zu Wendepunkt in der gaußschen Glockenkurve an. Je größer $2\sigma^2$ ist, desto breiter fällt die Kurve aus. So weist die Kurve *B* in Abb. 3.1 einen breiteren Verlauf auf als die Kurve *A*.

Eine solche Verteilung wird auch immer wieder im Zusammenhang mit der Aufnahme von Messergebnissen erwähnt, da in Experimenten die dortigen Messfehler, wenn sie rein zufallsbedingt (und entsprechend zahlreich) sind, sich in ihrer Häufigkeit genau nach dieser Form anordnen. Die Form dieser Verteilung nimmt in diesem Fall auch die einer gaußschen Verteilung an.

Die Größen μ und σ stimmen in (I-3.1) mit denen bei der Berechnung von Zufallsexperimenten völlig überein, wie sie dort für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ bzw. mit

σ^2 für die Varianz stehen.¹

Setzt man für unsern Zweck (s. gleich den nächsten Abschnitt) $z = k$, $\mu = k_0$ und $g(z) = c_K(k)$, so erhalten wir aus (I-3.1)

$$c_K(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (I-3.2)$$

und mit $c(k) = c_K(k) \cdot \sigma\sqrt{2\pi}$ die Gleichung $c(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$. (I-3.3)

Nun zum Begriff der **Modulation**: Dieser Begriff leitet sich aus der Nachrichtentechnik her und bezeichnet einen Vorgang, bei dem ein zu übertragendes Nutz-Signal (wie es sich in Form von Musik, Sprache oder Daten darstellt) einen sog. **Träger** verändert (was dann modulieren genannt wird). Dies ist ein übliches Verfahren in der Nachrichtentechnik. Der Träger besteht aus einem hochfrequenten Wellenzug (d.h., er besitzt eine sehr niedrige Wellenlänge) und er wird durch ein niederfrequentes Signal (also einen Wellenzug mit großer Wellenlänge) verändert bzw. moduliert. Daher rührt die Bezeichnung Modulation (*lat.* modulatio = Rhythmus, Takt) her, was so viel heißt wie: den Rhythmus verändern – in diesem Fall den des Trägers.

Abb. 3.2 zeigt eine Amplitudenmodulation, wobei die niederfrequente Modulationsschwingung die Hüllkurve bildet: Die positiven Halbwellen des Signals vergrößern die Amplituden des Trägers, während die negativen die Amplituden des Trägers verkleinern.² Dabei muss der Träger bei dieser Modulation als Bedingung stets eine höhere Frequenz aufweisen, als die höchste Frequenz, die im Signal vorkommt.

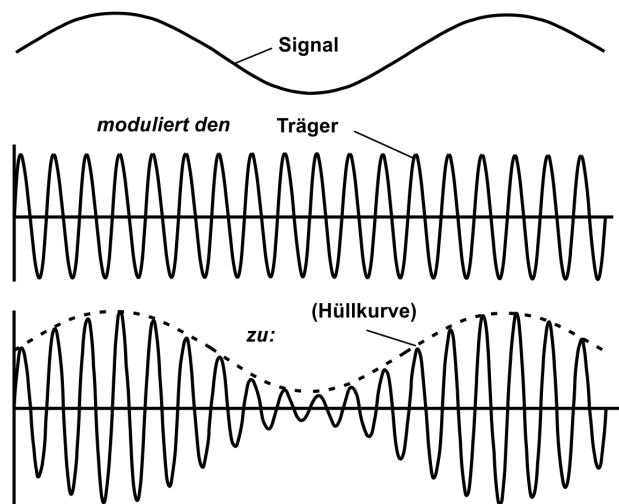


Abb. 3.2

In unserem Fall bildet demnach unser Signal die gaußsche Verteilung, die die e-Funktion $e^{i(kx-\omega t)}$ in unserem Integral (s. (I-1.1)) – d.i. dann unser Träger - verändert. Dies wird erreicht, indem die e-Funktion in (I-1.1) mit der Verteilung $c(k)$ (s. (I-3.3)) im Integranden multipliziert wird, also indem man die Funktion

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot c(k) \cdot e^{i(kx-\omega t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (I-3.4)$$

bildet.³

¹ Siehe dazu Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 682 oder unter www.didaktikmat2chem.de/Grundzuege_der_Wahrscheinlichkeitsrechnung_-_einfach_erklaert.pdf Unterkapitel D.8 und D.9.

² Siehe zu dieser Erklärung: Brockhaus. Naturwissenschaft und Technik. Bd. 2, S. 1342, Stichwort „Modulation“. Mannheim (F.A. Brockhaus), Heidelberg (Spektrum Akademischer Verlag) 2003.

³ Siehe Wikipedia: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wellenpaket> (9.06.2012).

Dass selbst die Funktion $y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx-\omega t)} dk$ (s. (I-3.4)) wieder eine Lösung der

allgemeinen Wellengleichung ist, wird nach allen bisherigen Betrachtungen verständlich. Denn

der Term $A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$ ist vom Ort x und der Zeit t unabhängig und kann somit beim Ausdifferenzieren der Wellengleichung als Konstante mitgeführt werden. Dies wird im Unterkapitel I.6, Abschnitt d) noch genau gezeigt.

Wie wir in dem folgenden Unterkapitel noch sehen werden, stellt (I-3.4), anschaulich betrachtet, ein räumlich begrenztes Paket dar, weshalb man ihm, da es durch Modulation mit einer gaußschen Verteilung entstanden ist - in Bezug auf den bedeutenden Mathematiker Carl Friedrich Gauß¹ - schließlich den Namen **gaußsches Wellenpaket**² gibt.

I.4 Das gaußsche Wellenpaket zu verschiedenen Zeiten

Unser Wellenpaket in (I-3.4) soll jetzt einmal für verschiedene Zeiten betrachtet werden. Dazu berechnen wir es zum einen a) für sein zeitliches Anfangsstadium bei $t = 0$ und zum anderen b) für eine beliebige Zeit t . Wir gehen dabei davon aus, dass sich unser Wellenpaket im dispersionsfreien Raum fortbewegt (eine Bedingung, die streng genommen nur im Vakuum erfüllt ist; in der Luft ist sie annähernd erfüllt).

Zur Erläuterung: Unter **Dispersion** versteht man das Phänomen, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Welle in Abhängigkeit von der Wellenzahl k befindet. Auf diese Weise ist es z.B. möglich, dass Licht durch ein Prisma in seine einzelnen Spektralbereiche aufgespalten werden kann. Denn in Abhängigkeit von ihrer Wellenzahl k besitzen diese eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und sie werden dadurch unterschiedlich stark durch das Prisma gebrochen. Nur im Vakuum ist $c \neq f(k)$.

Unser Wellenpaket soll somit für alle seine harmonischen Wellen, aus denen es sich zusammensetzt, stets die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit c haben, gleich welches k wir wählen; eine Annahme, die wir bereits oben des Öfteren schon gemacht haben.

a) Es sei also $t = 0$, dann ergibt sich aus $y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx-\omega t)} dk$ (s. (I-3.4))

die Beziehung

$$y(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ikx} dk \quad (I-4.1)$$

Mit $k' = k - k_0 \Leftrightarrow k = k' + k_0$ und $dk = d(k' + k_0) = dk'$ leitet sich daraus

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{k'^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ik'x} \cdot e^{ik_0x} dk' = A \cdot e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k'^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ik'x} dk' \\ &= A \cdot e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k'^2}{2\sigma^2} + ik'x} dk' \quad \text{her.} \end{aligned} \quad (I-4.2)$$

¹ Carl Friedrich Gauß, dt. Mathematiker und Astronom, 1777-1855.

² So nach Peter C. Schmidt u. Konrad G. Weil: Atom- und Molekülbau. Stuttgart, New York (Thieme), S. 73.

Das letzte Integral ist ein Integral der Form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ay^2+2by)} dy$ mit $y = k'$. (I-4.3)

Schlägt man in der Integraltafel¹ nach, so gilt hierfür die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ay^2+2by)} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2} d\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (I-4.4)$$

Da aber auch $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ ist² (I-4.5), vereinfacht sich dieser Ausdruck weiter zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ay^2+2by)} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{a}}, \quad (I-4.6)$$

wobei wir einen Ausdruck ohne jedes y erhalten.

Angewandt auf die Beziehung in (I-4.2) ergibt sich durch Vergleich, dass $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ und $b = \frac{-ix}{2}$. (I-4.7)

Damit ist für $y(x, 0)$ aus (I-4.1):

$$y(x, 0) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{ik_0x} \cdot e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}} \quad (I-4.8)$$

Wir erhalten also einen Ausdruck ohne jedes k , was uns eine einfache anschauliche Darstellung des gaußschen Wellenpakets ermöglicht (s. dazu die Abb. 4.1a, b und c). Hierin werden die Graphen für drei verschiedene Werte von k_0 aufgeführt – mit k_{01} bis k_{03} bezeichnet – und zwar für den Realteil der Funktion $y(x, 0)$

(s. (I-4.8)). Der imaginäre Anteil $i \cdot \sin k_0x$ der Funktion e^{ik_0x} , den man durch Auflösen von e^{ik_0x} nach der eulerschen Gleichung $e^{ik_0x} = \cos k_0x + i \cdot \sin k_0x$ erhält, entfällt für uns hierbei.

Die Graphen in den Abb. 4.1a, b und c zeigen sehr deutlich, dass wir es mit räumlich abgegrenzten Paketen zu tun haben, was unsere Bezeichnungsweise als Wellenpaket rechtfertigt. (Siehe dazu auch Abb. 0.1 zum Eingang dieses Artikels.)

b) Analog zu a) fragen wir als Nächstes danach, wie für ein beliebiges t der zugehörige Graph aussieht.

Wir formulieren dazu (I-3.4) etwas anders:

Statt $y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx-\omega t)} dk$ und unter der Voraussetzung, dass alle (unendlich

vielen) harmonischen Wellen darin sich mit der gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c

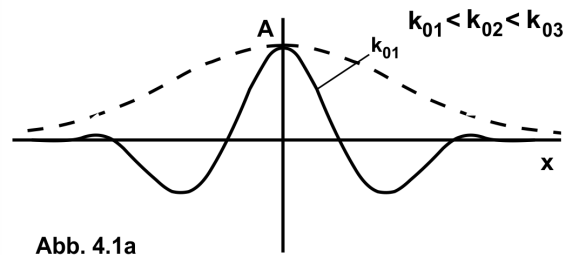


Abb. 4.1a

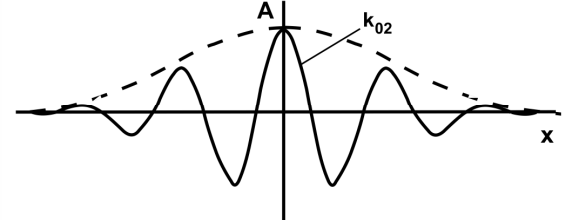


Abb. 4.1b

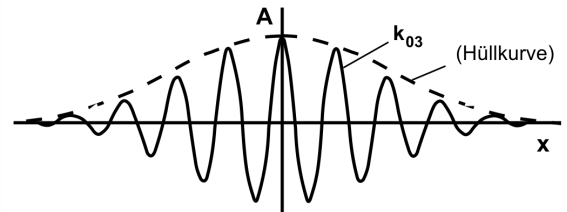


Abb. 4.1c

¹ Wolfgang Gröbner u. Nikolaus Hofreiter: Integraltafel. Unbestimmte Integrale. 5. Auflage. Wien, New York (Springer) 1975, S. 109.

² Siehe Franz Schwabl: Quantenmechanik. Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1998, S. 17.

fortbewegen, also mit $\omega = c \cdot k$ und $c = \text{const.}$, erhalten wir dann

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx-ckt)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ik(x-ct)} dk \quad (I-4.9)$$

Eine Substitution mit $z = x - ct$ ergibt

$$y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ikz} dk \quad (I-4.10)$$

Diesen Fall haben wir in den Herleitungen von (I-4.1) bis (I-4.8) schon behandelt, sodass wir dafür schreiben können

$$y(z) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{ik_0 z} \cdot e^{-\frac{z^2 \sigma^2}{2}} \quad (I-4.11)$$

Durch Rücksubstitution gelangen wir zu

$$y(x,t) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{ik_0(x-ct)} \cdot e^{-\frac{(x-ct)^2 \sigma^2}{2}} \quad (I-4.12)$$

Setzen wir hier $t = 0s$ ein, so erhalten wir wieder (I-4.8). Jedoch für $t \neq 0s$ bekommen wir für den Realteil Graphen, die jetzt um den Faktor ct nach rechts auf der Abszisse verschoben sind.

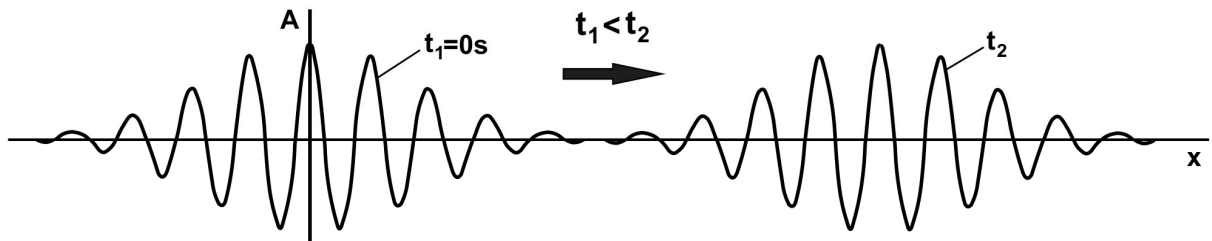


Abb. 4.2

Denn wir können für $e^{ik_0(x-ct)}$ nach der eulerschen Gleichung (s. (I-2.7)) schreiben:

$$e^{ik_0(x-ct)} = \cos(k_0(x-ct)) + i \cdot \sin(k_0(x-ct)), \quad (I-4.13)$$

woraus der Realteil wieder leicht zu ersehen ist. Speziell für diesen Realteil, erhalten wir für (I-4.12) demnach Abb. 4.2. Diese zeigt den Graphen von Abb. 4.1c zu verschiedenen Zeiten, bei $t_1 = 0s$ und für t_2 . Wir sehen dabei, wie das gaußsche Wellenpaket mit zunehmender Zeit nach rechts wandert.

Dies gilt aber nur bei einer Ausbreitung im Vakuum. **Bei Dispersion**, bei der die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenzahl k abhängig ist, beobachtet man, dass das Wellenpaket **mit der Zeit immer mehr auseinanderfließt**, bis es schließlich ganz verschwindet. Die mathematische Berechnung solcher zerfließenden Wellenpakete ist recht kompliziert, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden kann. Doch sei der Vollständigkeit halber schematisch

aufgeführt, wie sich dieses anschaulich darstellt (s. Abb. 4.3).¹

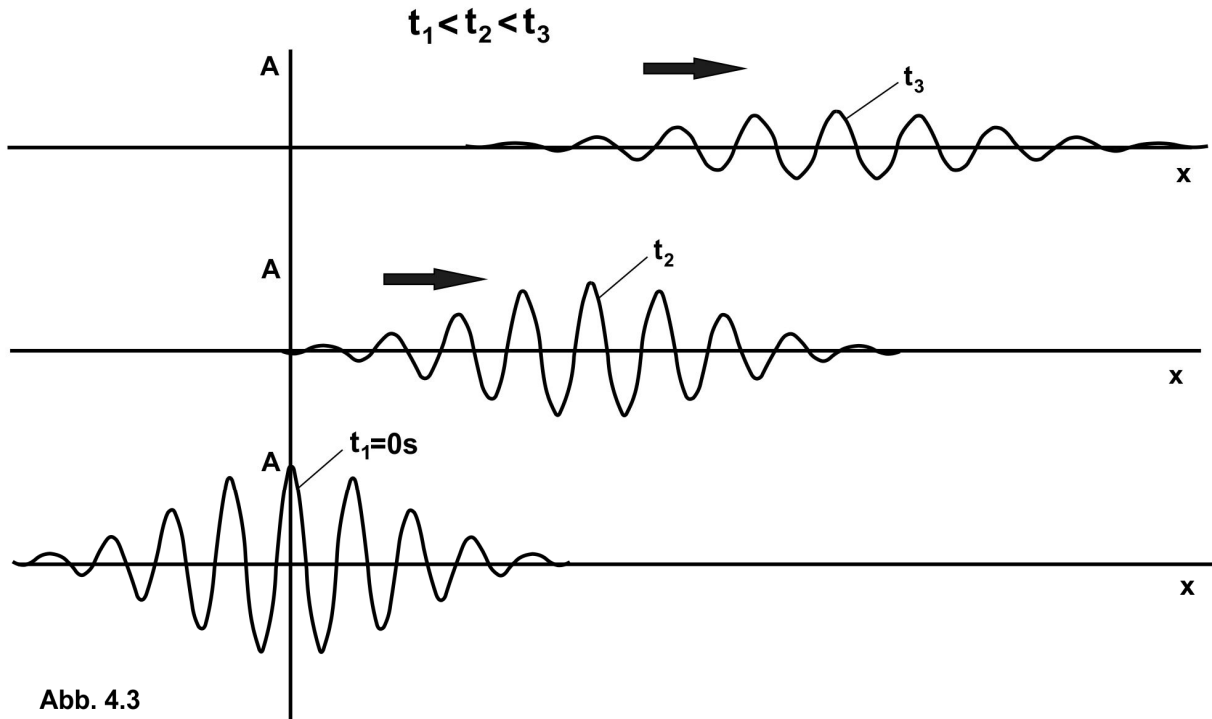
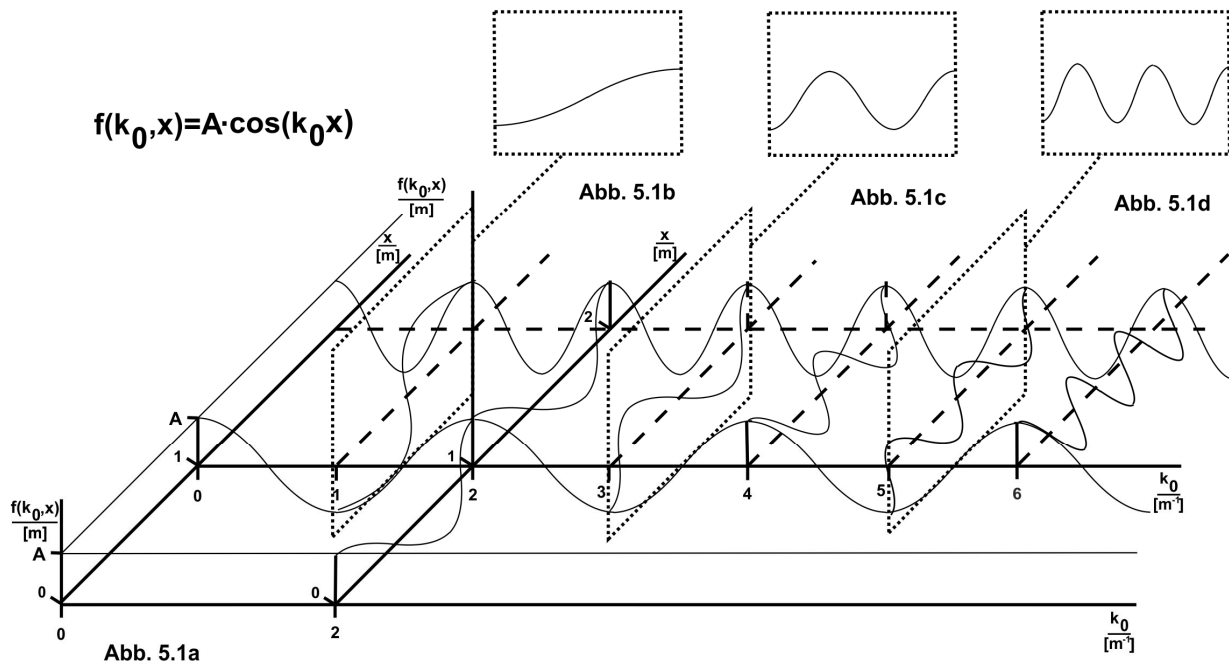


Abb. 4.3

I.5 Eine anschauliche Betrachtung des Trägers

Die Funktion $f(k_0, x) = A \cdot \cos(k_0 x)$, die wir aus (I-4.8) erhalten, indem wir für $e^{ik_0 x}$ den Realteil betrachten, soll noch unter anschaulichen Aspekten diskutiert werden. Sie bildet quasi unseren



¹ Siehe dazu auch Peter C. Schmidt u. Konrad G. Weil: Atom- und Molekülbau. Stuttgart, New York (Thieme), S. 73.

Träger, den wir mit der Funktion $f(x) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2 \sigma^2}{2}}$ modulieren, sodass wir gaußsche Wellenpakete wie in Abb. 4.1 erhalten. Dies gibt uns dann in etwa eine Vorstellung darüber, wie sich die gaußschen Wellenpakete von Abb. 4.1 für verschiedene Größenordnungen von k_0 verhalten.

Abb. 5.1 zeigt diese Funktion in Abhängigkeit von k_0 und x . Konzentrieren wir uns auf die Wellenzüge, die durch die Stelle mit $x = 1m$ gehen, und nehme k_0 jeweils einen der Werte von $k_0 = (1 \text{ bis } 6)m^{-1}$ an, so zeigt Abb. 5.1a, wie die dazugehörigen Cosinus-Funktionen aussehen. Je kleiner k_0 wird, desto weiter liegen bei der jeweiligen Cosinus-Funktion die Wellenmaxima und -minima auseinander. Ist $k_0 = 0m^{-1}$, so haben wir es statt mit einer Cosinus-Funktion sogar nur noch mit einer Geraden zu tun, welche sich im Abstand A zur x -Achse befindet. Je größer dagegen k_0 wird, desto mehr liegen die Wellenmaxima und -minima beisammen. Dies verdeutlichen auch die Ausschnitte in den gestrichelten Parallelogrammen. In den Abb. 5.1b-d sind diese exemplarisch herausgenommen, wobei wir sehr gut erkennen, wie mit zunehmendem k_0 die Wellenmaxima und -minima der Cosinus-Funktionen zusammenrücken.

Betrachten wir speziell für die Cosinus-Funktion mit $k_0 = 2m^{-1}$ die Amplitude am Wert $x = 0m$, so stellen wir fest – und das gilt für jede andere Cosinus-Funktion auch –, dass sie bei der Amplitude A beginnt, da $f(2, 0) = A \cdot \cos(2 \cdot 0) = A$.

Genauso, wie wir die Cosinus-Funktionen für die verschiedensten k_0 's an der Stelle eines x - Wertes betrachtet haben, lassen sie sich für verschiedene x ', die durch ein bestimmtes k_0 gehen, diskutieren. Die Funktionen $f(k_0, 1)$ und $f(k_0, 2)$ sind für so einen Fall in Abb. 5.1a an der Stelle für $k_0 = 2m^{-1}$ eingezeichnet. Auch hier können wir sehen, dass – ganz analog zur obigen Erörterung mit den verschiedenen k_0 - Werten – die Abstände zwischen den Wellenmaxima und -minima immer mehr zunehmen, je kleiner der x -Wert ausfällt. Bei $x = 0m$ liegt wieder eine Gerade vor. Abb. 5.1a zeigt also die Verhältnisse der Funktion $f(k_0, x) = A \cdot \cos(k_0 x)$ für den Bereich von $k_0 = 0m^{-1}$ bis $k_0 \rightarrow \infty$ und von $x = 0m$ bis $x \rightarrow \infty$ und somit den Verlauf dieser Funktion für sehr kleine bzw. sehr große Größenordnungen.

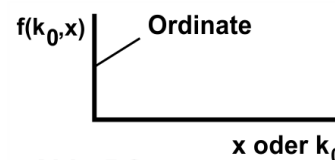


Abb. 5.2a

Als Nächstes sollen noch in einer erweiterten Betrachtung die Verhältnisse diskutiert werden, wenn $k_0 \rightarrow -\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ geht: Da die Funktion $f(k_0, x)$ symmetrisch zu jeder Ordinate bei $k_0 = 0m^{-1}$ bzw. $x = 0m$ ist (s. Abb. 5.2a) – es gibt hiervon unendlich viele Ordinaten in Abb. 5.1a, da $A \cdot \cos(k_0 x) = A \cdot \cos(-k_0 x)$ –, verhält sich Abb. 5.1a genau spiegelbildlich zu diesen Ordinaten. Liegt Abb. 5.1a in unserem 1. Quadranten (s. Abb. 5.2b), so liegen die Spiegelbilder im 2. und 4. Quadranten. Die Punkte auf dem Koordinatenkreuz stehen hier für die jeweiligen Ordinaten als Senkrechte aus der Ebene dazu. Insofern können wir uns leicht vorstellen, wie sich die Funktion $f(k_0, x) = A \cdot \cos(k_0 x)$ für die Bereiche von $k_0 \rightarrow -\infty$ bis $k_0 \rightarrow \infty$ und von $x \rightarrow -\infty$ bis $x \rightarrow \infty$ verhält. Für den 3. Quadranten von $k_0 \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ liegt sogar eine Punktsymmetrie vor:

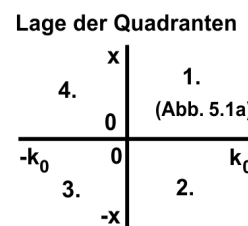


Abb. 5.2b

Jeder einzelne Wert in Abb. 5.1a wird hier an der einzigen Ordinate

im Ursprungspunkt bei $x = 0m$ und $k_0 = 0m^{-1}$ durch Punktspiegelung in das Feld des 3. Quadranten überführt.

Soweit die Diskussion des Realteils unseres Trägers, aus dem durch Modulation mit der Funktion

$f(x) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2 \sigma^2}{2}}$ die jeweiligen gaußschen Wellenpakete entstehen.

Addieren wir zu diesem noch den Imaginärteil, wie er durch $i \cdot \sin(k_0 x)$ wiedergegeben wird, so erhalten wir den Träger für ein gaußsches Wellenpaket als Ganzes. (Die anschaulich Diskussion der Sinus-Funktion verläuft dann analog wie die mit der eben ausgeführten Cosinus-Funktion.)

Es wird somit nicht nur der Realteil, wie ihn die Abb. 4.1 und 4.2 wiedergeben, als **gaußsches Wellenpaket** bezeichnet, sondern auch die komplexe Form, wie sie von (I-3.4) ausgeht¹, bei hier angenommener gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle harmonischen Wellen, aus denen sie konstruiert wurde.

I.6 Lösungen der allgemeinen Wellengleichung

Im Folgenden seien die Berechnungen der in diesem Artikel angesprochenen Wellenfunktionen in Verbindung mit der allgemeinen Wellengleichung aufgeführt:

a) Für $y_j(x, t) = A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot \Delta k$ (s. (I-2.11)) sei $A_j^\Delta \cdot \Delta k = h$ (I-6.1) gesetzt, sodass

$y_j(x, t) = h \cdot \cos(k_j x - \omega_j t)$. Danach erhalten wir für die Differentiation nach x :

$$\frac{\partial y_j(x, t)}{\partial x} = h \cdot (-k_j) \cdot \sin(k_j x - \omega_j t) \quad (I-6.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial x^2} = h \cdot (-k_j^2) \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \quad (I-6.3)$$

und für die Differentiation nach t entsprechend:

$$\frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial t^2} = h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t) \quad \text{mit } k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k] \quad (I-6.4)$$

Durch Einsetzen in die allgemeine Wellengleichung (s. (I-2.5)), hier in der Form

$$\frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial t^2}, \text{ erhalten wir daraus} \quad (I-6.5)$$

$$h \cdot (-k_j^2) \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) = \frac{1}{c^2} \cdot h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t), \quad (I-6.6)$$

woraus durch Kürzen wieder die Bedingung $c = \frac{\omega_j}{k_j}$ entsteht. Diese ist auch erfüllt, wenn

$$\omega_j = c \cdot k_j = c \cdot \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k] \text{ ist.} \quad (I-6.7)$$

¹ Siehe Franz Schwabl: Quantenmechanik. Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1998, S. 17.

Was für ein Glied gilt, trifft auch für n aufsummierte Glieder zu, denn statt mit nur einem Glied in (I-6.6) auf jeder Seite der Gleichung können diese auch auf n gleichartige Glieder unter der Voraussetzung gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit erweitert werden, wobei die Gleichung dann immer noch gültig ist. Es gilt somit

$$\sum_{j=1}^n h \cdot (-k_j^2) \cos(k_j x - \omega_j t) = \frac{1}{c^2} \cdot \sum_{j=1}^n h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t), \quad (I-6.8)$$

unter der Bedingung $c = \frac{\omega_j}{k_j}$ für alle j . Damit löst auch die Summenfunktion

$$y(x, t, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x, t) = \sum_{j=1}^n A_j^\Delta \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot \Delta k \quad (I-6.9)$$

die allgemeine Wellengleichung (so aus unserer Ausgangsfunktion (I-2.11) für die einzelnen Glieder zusammengesetzt). Setzen wir wieder $k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]$, so erhalten wir (I-2.16).

b) Für $y_j(x, t) = A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) \cdot dk$ (s. (I-2.21)) und $k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]$ setzen wir dieses Mal

$h = A_j^d \cdot dk$. Die Rechnung für die Gültigkeit der allgemeinen Wellengleichung erfolgt genauso wie unter Abschnitt a) mit den entsprechenden Gleichungen (I-6.2) bis (I-6.7). Auch hier können wir (I-6.6) mit n Gliedern durchführen, die analog aufsummiert werden. Als Ergebnis erhalten wir, dass der Ausdruck

$$y(x, t, n) = \sum_{j=1}^n y(k_j, x, t) = \sum_{j=1}^n A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk \quad (\text{s. (I-2.22)}) \quad (I-6.10)$$

die allgemeine Wellengleichung löst. (Es sei wieder $k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]$.)

c) Summieren wir in (I-2.22) nicht über n Glieder von a bis b auf (wir lassen die Summe also nicht von $j = 1$ bis $j = n$ gehen), sondern über unendlich viele Flächenelemente $A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk$ mit

$k_j = \left(a + \frac{2\pi}{s} \cdot j \right) [k]$ und damit über den gesamten Definitionsbereich aller k -Werte von $-\infty$ bis ∞ , so

erhalten wir in Analogie zu I.6, Abschnitt a), dort (I-6.8) mit $h = A_j^d \cdot dk$, eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h \cdot (-k_j^2) \cos(k_j x - \omega_j t) = \frac{1}{c^2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t), \quad (I-6.11)$$

was nichts anderes bedeutet, dass auch die Funktion

$$y(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(k_j, x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk \quad (I-6.12)$$

die allgemeine Wellengleichung löst.

Die Erweiterung der Gleichung (I-6.8) mit endlich vielen Gliedern mit $h = A_j^d \cdot dk$, auf die Gleichung (I-6.11) mit unendlich vielen Gliedern bedeutet keine Beschränkung bzgl. der Lösbarkeit der Wellengleichung. Begründung:

Genauso wie eine Funktion $f(z) = |z|$ mit $z \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$ immer einen endlichen Wert größer null liefert (für endlich viele z 's, wenn $a < z < b$), liefert diese auch für unendlich viele z 's stets einen endlichen Wert größer null (also wenn $-\infty < z < \infty$), da ja immer $z \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$ ist. Die Eigenschaft von $f(z)$ ändert sich dadurch nicht, ob wir sie nun für endlich viele oder unendlich viele z -Werte betrachten.

Ganz analog ist zu verstehen, dass, wenn jedes Glied $A \cdot \cos(kx - \omega t) dk$ von (I-2.24) die allgemeine Wellengleichung löst, dies ohne Weiteres für unendlich viele Glieder in (I-2.25) gilt. Die Lösbarkeit der allgemeinen Wellengleichung wird dadurch nicht beeinträchtigt und somit trifft dies auch für (I-6.12) zu.

Da die Gleichung

$$y(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j^d \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk \quad (\text{s. (I-6.12)})$$

nichts anderes als der Ausdruck

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \cos(kx - \omega t) dk \text{ ist,} \quad (\text{s. (I-2.26)})$$

wobei $A_j^d = A$ für alle j , $k_j = k$ und $\omega_j = \omega$, löst diese also ebenfalls die allgemeine Wellengleichung.

d) Um (I-3.4) nach x und t zu differenzieren, gehen wir der Einfachheit halber wieder von der Cosinus-Funktion aus und betrachten jeweils nur ein Glied $y_j(x, t)$ unter dem Integral

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \cos(kx - \omega t) dk \text{ als} \quad (\text{s. (I-3.4)})$$

$$y_j(x, t) = A \cdot e^{-\frac{(k_j-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk, \quad (\text{I-6.13})$$

wobei $k = k_j$ und $\omega = \omega_j$ ist.

Hierbei setzen wir nun $h = A \cdot e^{-\frac{(k_j-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot dk$. Wir können damit die Rechnung wie unter Abschnitt a) mit den entsprechenden Gleichungen (I-6.2) bis (I-6.6) anwenden. Demnach löst (I-6.8) mit $h = A \cdot e^{-\frac{(k_j-k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot dk$ für $j = 1$ bis $j = n$, also für endlich viele Glieder und bei angenommener gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit hierfür, die allgemeine Wellengleichung.

Dafür (also für (I-6.8)) können wir in einer etwas anderen Form wie folgt schreiben

$$\sum_{j=1_a}^{n_{b-1}} h \cdot (-k_j^2) \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) = \frac{1}{c^2} \sum_{j=1_a}^{n_{b-1}} h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t), \quad (\text{I-6.14})$$

wobei $a < b - 1$ ist. Das Intervall $[a; b]$ bestehe also aus n Gliedern. Bilden wir den Grenzwert

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \sum_{j=1_a}^{n_{b-1}} h \cdot (-k_j^2) \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{c^2} \sum_{j=1_a}^{n_{b-1}} h \cdot \omega_j^2 \cdot (-) \cos(k_j x - \omega_j t) \quad (\text{I-6.15})$$

mit $h = A \cdot e^{-\frac{(k_j - k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot dk$, so können wir unter der Voraussetzung gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle j , feststellen, dass die rechte Seite gegen den gleichen Grenzwert strebt wie die linke Seite (beide Seiten sind dann identisch, da $c = \frac{\omega_j}{k_j}$), womit die Gültigkeit der allgemeinen Wellengleichung für (I-6.15) erfüllt ist. Das wiederum heißt, dass auch

$$y(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k_j - k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \cos(k_j x - \omega_j t) dk \quad (I-6.16)$$

unter gemachter Voraussetzung die allgemeine Wellengleichung löst. – Und da (I-6.16) nur ein anderer Ausdruck für die Integralschreibweise ist, ist unser Ausdruck

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \cos(kx - \omega t) dk \quad (s. (I-3.5))$$

für alle $k = k_j$ und $\omega = \omega_j$ ebenfalls Lösung dieser Wellengleichung.

Ganz analog können wir die eben gemachte Berechnung auch für die imaginären Glieder durchführen, sodass wir mit der eulerschen Gleichung den Ausdruck

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (s. (I-3.4))$$

erhalten, in Einklang mit der allgemeinen Wellengleichung.

I.7 Zusammenfassung

Ein gaußsches Wellenpaket entsteht durch Modulation einer Funktion

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (s. (I-1.1))$$

- die durch Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen erhalten wird - mit einer gaußschen Verteilung

$$g(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (s. (I-3.1)).$$

Dabei wird mathematisch der Integrand mit diesem Ausdruck multipliziert, sodass sich die Formel

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (s. (I-3.4))$$

ergibt. Betrachten wir diese für eine beliebige Zeit t , so wird bei jeweils gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle ihrer Glieder der Ausdruck

$$y(x,t) = A \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{ik_0(x-ct)} \cdot e^{-\frac{(x-ct)^2 \sigma^2}{2}} \text{ erhalten.} \quad (\text{s. (I-4.12)}).$$

Das gaußsche Wellenpaket wandert bei ausbleibender Dispersion, so im Vakuum, mit zunehmender Zeit t unverändert in Richtung größerer x -Werte (s. Abb. 4.2). Bei Dispersion beobachtet man ein Zerfließen des Wellenpakets (s. Abb. 4.3).

Sowohl (I-3.4) als auch (I-4.12) für ein beliebiges t wird als **gaußsches Wellenpaket** bezeichnet.

Bei kleinen Werten von k_0 für den Realteil von $y(x,t)$ gelangen wir auf nur wenige

Wellenberge und -täler innerhalb der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2 \sigma^2}{2}}$, deren Anzahl und Dichte jedoch zunimmt, je größer k_0 ausfällt (s. Abb. 4.1a-c).

Das gaußsche Wellenpaket stellt **eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung** dar.