Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung - einfach erklärt

Bernhard Blank

Aufrufbar unter: www.didaktikmat2chem.de [1]

Artikel D

Fassung 5.7

[1] Titel der Website: Erklärungen in Mathematik, Physik und Physikalischer Chemie

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung – einfach erklärt

Eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, u. a. in Zufallsexperimente, in die Gesetze der Wahrscheinlichkeit und in ihre grundlegenden Begriffe.

Dieser Artikel gibt einen ersten Einblick in die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei werden folgende Aspekte behandelt:
Was hat es mit den zwei Gegenspielern **Zufall** und **kausales Denken** auf sich und was versteht man unter dem mathematischen Zufall?
Was ist ein **Zufallsexperiment** und welche relevanten Begriffe gibt es hierzu?
Wie berechnet man die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** und wovon handelt das **empirische Gesetz der großen Zahl?** (Einige leichte Gesetzmäßigkeiten aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden dazu zusammengestellt.)

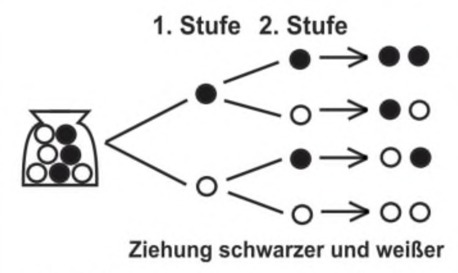

Abb. 0.1

Weiter aber auch: Welche **2 Arten von Zufall** gibt es und welche **3 Bedeutungen** lassen sich mit dem Wort **Wahrscheinlichkeit** verbinden?
Ferner: Worum geht es bei mehrstufigen Zufallsexperimenten? Zur Darstellungsweise über ein Baumdiagramm siehe Abb. 0.1. Außerdem werden die Größen **Zufallsvariable**, **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung** erläutert.

Verwendete Begriffe und Namen: Ausfall, Ausgang, Demokrit, Elementarereignis, Ereignis, Ereignisraum, Ergebnismenge, Ergebnisraum, Erwartungswert, absolute und relative Häufigkeit, Realisation, Standardabweichung, Varianz, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Zufall, Zufallsexperiment, Zufallsgröße, Zufallsvariable.

Inhalt

D.1 Überblick

Begonnen wird mit einer kleinen Gegenüberstellung von kausal und zufällig bedingten Sachverhalten in der Welt, an die sich einige charakterisierende Gedanken über den Zufall und seinem Auftreten anknüpfen. Hierbei wird auf die Bedeutung des Zufalls für die Naturwissenschaften eingegangen (siehe Unterkapitel D.2). Die mathematische Behandlung des Zufalls führt uns zu Zufallsexperimenten und den damit verbundenen Begrifflichkeiten (s. D.3). Absolute und relative Häufigkeiten in Zufallsexperimenten ermöglichen direkt den **zentralen Begriff der Wahrscheinlichkeit**, der hier mit ein paar einfachen Formeln und einem Rechenbeispiel untermauert wird (s. D.4). Wie der Zufall im Alltag erlebt werden kann und welche Vorstellungen alle in unserer gedanklichen Welt assoziiert werden können, wenn wir vom Begriff der Wahrscheinlichkeit hören oder lesen, ist der Inhalt von D.5. - Die Fragestellung, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, 2 Sechsen in einem Würfelspiel hintereinander zu würfeln oder aus einem Sack eine schwarze und eine weiße Kugel nacheinander zu ziehen, ist das Thema der **mehrstufigen** bzw. gekoppelten **Zufallsexperimente**, s. dazu auch Abb. 0.1 (dies alles unter D.6). In D.7 wird auf den etwas unverständlichen Begriff der Zufallsvariablen eingegangen und sein Sinn herausgestellt. Und wie man für die grafischen Verteilungen von Zufallsexperimenten auf die Begriffe **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung** kommt, das wird in D.8 und D.9 erläutert.

D.2 Zufall und Notwendigkeit

Seit dem griechischen Altertum ist es üblich, die Geschehnisse in der materiellen Welt in zufällig und gesetzlich bedingte Sachverhalte einzuteilen. So formulierte schon der griechische Philosoph Demokrit (* um 460 v. Chr.): „Alles, was im Weltall existiert, ist die Frucht von Zufall und Notwendigkeit.“ [a] Gerade in den Naturwissenschaften hat sich diese demokritsche Auffassung bewährt, und sie ist so zu einem festen Bestandteil in ihr geworden. Mit **Notwendigkeit** ist dabei alles gemeint, hinter dem eine Gesetzmäßigkeit steht. Zu diesen Gesetzmäßigkeiten können nicht nur solche wie das **Gesetz** der Schwerkraft oder das der Bewegung in der Physik gezählt werden[b], sondern auch beim Zufall – genauer gesagt: bei Zufallsexperimenten – gibt es Gesetzmäßigkeiten, von denen jede Wahrscheinlichkeitsrechnung lebt und worauf später noch eingegangen wird.

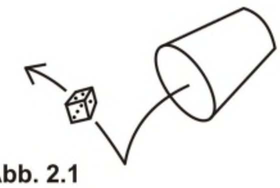
Abb. 2.1

Unter dem **Zufall** versteht man allgemein etwas, was uns immer wieder bei den bekannten Schulbeispielen vom Werfen eines Würfels (s. Abb. 2.1) oder einer Münze begegnet: Offenbar gibt es Momente im Leben und in der Natur, die nicht vorhersagbar sind, und die Erkenntnis, dass es solche Sachverhalte gibt, wird durch den Begriff des Zufalls ausgedrückt. Steht denn auch sprachlich der Zufall für das, was einem „zufällt“. So kann einerseits ein platzender Autoreifen bei hoher Geschwindigkeit aufgrund eines Materialfehlers schlimme Folgen haben, ebenso ein Erdbeben, das sich nicht vorhersagen lässt. Andererseits ist die Entstehung des Lebens immer wieder mit vielen Zufällen verbunden, wie jedermann vom Biologieunterricht her weiß, um so ein positives Beispiel für den Zufall zu nennen.
Das Bestreben Materialfehler gering zu halten, ist gerade ein Anliegen in der Technik, ebenso wie bei Seebeben entsprechende Frühwarnsysteme bereitzustellen, wenn man auf den Umgang des Menschen mit dem Zufall eingehen will. Technische Vorkehrungen sowie Konstruktionen haben vielfach den **Zweck**, den Auswirkungen des Zufalls entgegenzuwirken. Weiter könnte man den Bau eines Hauses aufführen, um bei Wetterunbilden, so bei einem Wolkenbruch, in jeder Hinsicht geschützt zu sein (s. Abb. 2.2), oder den Einbau von Stoßdämpfern gegen die Schlaglöcher beim Autofahren – alles als ganz praktischer Schutz vor zufälligen Einwirkungen.


Abb. 2.2

Bisweilen findet man die Einteilung, dass die Geschehnisse auf der Welt in zufällig und **kausal** (vom *lat.* causa = Ursache, Grund) bedingte Sachverhalte aufzuteilen seien. Wenn man bedenkt, dass ein Würfel neben den zufällig erzeugten Augenzahlen bei seinem Fall außerdem dem Gesetz der Schwerkraft gehorcht, so ist die Schwerkraft der **Grund** oder die **Ursache** dafür, dass diese Bewegung stattfinden kann. (Das wäre das, was ich oben mit Notwendigkeit bezeichnet habe.) Betrachte ich also den gesetzlichen Aspekt eines Vorgangs, so kann ich für ihn meistens eine Ursache ausmachen, die ihn in Gang setzt oder aufrechterhält. Insofern stehen die Bezeichnungsweisen kausal und gesetzlich bedingter Sachverhalt meistens für ein- und dasselbe. (Siehe dazu aber Aufgabe 1).)

Wer nun wieder an das Wetter denkt, wird sicher einwenden, dass man doch in der Lage ist, für wenige Tage das Wetter vorauszusagen. Strömungen und Wettereinflüsse, die man messen kann und die unser tägliches, meteorologisches Geschehen bestimmen, sind erfassbar. Auch Computermodelle erlauben, das Wettergeschehen abzuschätzen – und Klimamodelle ermöglichen eine tendenzielle Auskunft sogar über Jahrzehnte. Doch wie konkret das Wetter über lange Zeiträume auf uns wirkt, z. B. dann sogar durch einen Blitzeinschlag, ist nach wie vor nicht genau vorhersagbar.

---

[a] Es soll hier aber nicht die immaterielle Welt geleugnet werden, für deren Existenz nach Ansicht des Autors die Werte jeder Kultur und verschiedene Glaubens- und Sinninhalte sprechen.
[b] Für die Chemie sei das Massenwirkungsgesetz genannt und für die Biologie die Mendelschen Regeln.

So wird das Wetter wohl immer eine Mischung aus zufälligen und kausalen Faktoren bleiben.

Was ist nun der Zufall im eigentlichen Sinn? Denn mancher tut sich mit diesem Begriff etwas schwer, und es erfordert sicher auch ein gewisses Maß an Abstraktion, wollte man mit ihm richtig umgehen. Schließlich gibt es ja immer wieder die Ansicht, dass es so etwas wie den Zufall gar nicht gibt! Dies ist deswegen immer wieder Gegenstand philosophischer Erörterungen. Dem steht entgegen, gerade auch solche Vorgänge begreifen zu wollen, wie z. B. die beim Werfen eines Würfels. Vor allem in den **Naturwissenschaften** hat sich der Begriff durchgesetzt, weil man mit ihm vieles sehr einfach und tragfähig erklären kann. So ist im Mikrokosmos das Moment des Zufalls gar nicht mehr wegzudenken und es hat sich dort als äußerst fruchtbar erwiesen. Man denke nur an die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen in einem Atom und an die Theorie, die sich dahinter verbirgt, die sog. Quantenmechanik.
Der Zufall in den Natur- und Technikwissenschaften ist stets als **wertfrei** anzusehen – so zumindest gilt das für den mathematischen Zufall in diesen Disziplinen. Diese Art von Zufall ist dann auch der Hauptgegenstand dieses Artikels.

Der eine oder andere mag vielleicht einwenden, dass selbst bei einem Würfelwurf man sich vorstellen kann, dass dieser auf ganz feinen Bahnen über die Ecken des Würfels abläuft und dass es von diesen Bahnen so viele gibt, dass ein Wurf jedes Mal anders ausfällt. Schaut man aber genauer hin, so hat gerade die moderne Naturwissenschaft über Experimente feststellen können, dass es so feine Bahnen auf mikrophysikalischer Ebene gar nicht gibt und dass der Bahnbegriff im Mikrokosmos auch obsolet geworden ist.[a] Vielmehr kann man nur mit einer gewissen Unschärfe sagen, wo sich eine mögliche Bahn, wenn man diese Ausdrucksweise einmal gebrauchen will, befindet. So ist dieses Argument mit den ganz feinen Bahnen nicht als Ultima Ratio für die Würfelecken tauglich.

Weiterhin ist es eine Eigenschaft des Zufalls, dass er sich nicht austricksen lässt, das betrifft gerade den mathematischen Zufall. (Siehe dazu Aufgabe 7).) Gerade bei Glücksspielen wird dies immer wieder behauptet, wenngleich unter dem Vorwand, hinter die Gesetzmäßigkeiten von Zufallsexperimenten zu kommen, die es zweifelsohne gibt.
In diesem Artikel ist nur der Zufall von Belang, der unter gleichen Bedingungen immer wieder auftritt, und nur der ist auch in den Naturwissenschaften von Bedeutung – der sog. **mathematische Zufall**. Mit anderen Worten: Ein Zufall, der nur einmal auftritt, kann mathematisch gar nicht behandelt werden. (Insofern ist nicht alles, was einem „zufallen" kann, ein Zufall im mathematischen Sinne. Doch dazu später mehr.)
Ein „Maß" für den mathematischen Zufall stellt, wie weiter unten noch erläutert wird, die **Wahrscheinlichkeit** dar, mit Werten zwischen 0 und 1. Diese hat keine anschauliche Bedeutung und tritt vornehmlich als reine Rechengröße auf. Allerdings kann man über die Verteilung von Wahrscheinlichkeiten, dieser einen anschaulichen Charakter verleihen. Siehe dazu die Abb. 2.3, in der die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron um einen Atomkern anzutreffen, dargestellt wird (man spricht hier auch von Aufenthaltswahrscheinlichkeit): Je dichter die Punkteanzahl pro Volumenelement ist, desto wahrscheinlicher ist es dort, ein Elektron anzutreffen.

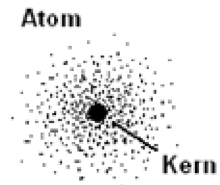

Abb. 2.3

D.3 Begriffe zu Zufallsexperimenten

Wiederholt man einen Vorgang, in denen der Zufall ausschließlich auftritt, unter <u>gleichen</u> Bedingungen immer wieder, so nennt man dies ein **Zufallsexperiment** oder einen **Zufallsversuch**.

[a] Siehe dazu auch meinen Artikel „Heisenbergs Unschärferelation – ihre Bedeutung und Veranschaulichung"[1], das ein Experiment zum Bahnbegriff im Mikrokosmos angibt, bei dem man einmal explizit die Probe aufs Exempel gemacht hat.

Im Alltag gibt es nun eine ganze Reihe von Situationen, deren Auftreten als ein Zufallsexperiment gedeutet werden kann. Das bekannteste hierbei ist das oben erwähnte Werfen eines Würfels oder einer Münze. Ganz gleich, wie der Würfel oder die Münze geworfen wird, erhält man jeweils nicht vorhersehbare Ergebnisse für die Augenzahl oder die Münzseite. Aber auch die Kartenspiele, bei denen immer wieder gemischt und neu verteilt wird, stellen Zufallsexperimente dar. Weiterhin gehören das bekannte Lotto- und Roulette-Spiel eindeutig in die Kategorie der Zufallsexperimente.

Ein Zufallsexperiment selbst begreift man stets aus einer Abfolge von **Ausfällen**. Ein Ausfall ist in den oben genannten Beispielen der Wurf eines Würfels, das Ziehen einer Karte in einem Kartenspiel oder einer einzelnen Lotto-Zahl. Finden mehrere Ausfälle unter exakt gleichen Bedingungen hintereinander statt, wie z. B. der Wurf eines Würfels, ergeben sie erst das Zufallsexperiment als Ganzes. Beim Ziehen einer Karte – oder einer Lotto-Zahl - müsste zur Einhaltung der gleichen Bedingungen die Karte bzw. die Lotto-Kugel immer wieder zurückgelegt werden.

Als nächsten wichtigen Begriff spricht man bei einem Zufallsexperiment von **Ausgängen**, die es bei einem Ausfall hat. So kann beim Würfelspielen ein Wurf z. B. den Ausgang 3 oder den Ausgang 6 als Ergebnis haben oder beim Kartenspiel die gezogene Karte die Ausgänge Herz, Karo, Pik oder Kreuz.
Ebenso wie man danach fragen kann, wie oft eine 3 gewürfelt wird, ist die Fragestellung erlaubt, wie oft eine Augenzahl mit geradem Wert, also eine 2, 4 oder 6 auftritt. Man spricht dann nicht mehr von Ausgängen, sondern von einem **Ereignis**. Ein Ereignis besteht also aus einer oder mehreren Ausgangsmöglichkeiten. Bei einem Wurf mit 2 Würfeln könnte man so fragen, wie häufig das Ereignis eintritt, bei dem die Summe beider Augenzahlen den Wert 7 ergibt.
Der Begriff des Ereignisses ist somit umfassender als der Begriff des Ausgangs.
Ist nach einem Ereignis gefragt, bei dem es genau nur einen Ausgang gibt, so nennt man dies mathematisch ein **Elementarereignis**. Das Auftreten des Ausgangs 3, wie oben erwähnt, ist also ein solches Elementarereignis. So weit also zu den einfachen Begrifflichkeiten bei Zufallsexperimenten.

Im Folgenden soll in diesem Artikel immer wieder auf bestimmte Zufallsexperimente zurückgegriffen werden. Diese sind im Einzelnen:

a) der Wurf eines Würfels
b) der Wurf zweier Würfel, wobei nach dem Ereignis gefragt wird, dass die Summe der Augenzahlen den Wert 7 ergibt
c) der Wurf einer Münze
d) das Ziehen von Karten aus einem Kartenstapel, wobei nur auf die Kartenart Herz, Karo, Pik und Kreuz Wert gelegt wird (die Abbilder Bube, Dame, König, Ass sowie die Werte 2 bis 10 sollen keine Rolle spielen)
e) das Ziehen 2er Kugeln aus einem Sack mit 3 schwarzen und 4 weißen Kugeln, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht wieder in den Sack zurückgelegt wird

Weitere, auf diesen Zufallsexperimenten aufbauende Beispiele können mit den hier erworbenen Kenntnissen in den Aufgaben am Schluss dieses Artikels berechnet werden.

Mathematisch werden einem Ereignis Formelbuchstaben wie $A, B, C, ..., E$ bzw. E_i verliehen. Wird nur nach den Elementarereignissen beim Wurf eines Würfels gefragt, so ist z. B. mit $i = 1, ..., 6$: $E_1 = \{1\}, ..., E_6 = \{6\}$ (die Angaben in den geschweiften Klammern stehen für die jeweiligen Ausgänge).
Da bei einem Würfelwurf stets mehr Ereignisse als Elementarereignisse auftreten können - so sind Ereignisse für gerade und ungerade Augenzahlen möglich -, kann man für die Ereignisse gerade (E_g) bzw. ungerade (E_{ug}) schreiben: $E_g = \{2, 4, 6\}$ bzw. $E_{ug} = \{1, 3, 5\}$.

Neben den Formelbuchstaben $A, B, C, ..., E$ bzw. E_i für ein Ereignis, treten für ein Elementarereignis noch die Schreibweisen ω_i bzw. ω auf [2], sodass in der Literatur mehrere Formelbuchstaben anzutreffen sind. Bei einem Würfelwurf käme man so auf die Elementarereignisse $\omega_1, ..., \omega_6$ [a].

An den Schreibweisen $E_1 = \{1\}$ oder $E_g = \{2, 4, 6\}$ wird deutlich, dass bei Zufallsexperimenten oft eine **Mengenschreibweise** vorzufinden ist. An diese Schreibweise wird sich jeder gewöhnen müssen, der sich näher mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst. Dies begründet sich damit, dass es nicht nur Mengen von Zahlen und Gegenständen gibt, sondern man sich auch Mengen von Ausgängen oder - allgemein - **Mengen von Ereignissen** denken kann. Der Mengenbegriff wird hier also recht universell aufgefasst.
In diese Mengenschreibweise fallen nun folgende Begriffe:
a) Betrachtet man die Elementarereignisse, also beim Würfelspiel die Ereignisse E_1 bis E_6 mit $E_1 = \{1\}, ..., E_6 = \{6\}$, so nennt man die Menge <u>aller möglichen Elementarereignisse</u> bzw. Ausgänge des Zufallsexperiments die **Ergebnismenge Ω.** In der ω-Schreibweise wäre so für den Würfelwurf, die Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ zu formulieren. Man schreibt dafür beim Würfelwurf auch: $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ [b]
Für Ω ist der Name **Ergebnisraum** gebräuchlich, wenn man Ω bildlich darstellen will. Siehe dazu Abb. 5.1 für das Ergebnis 2er Würfe.
b) Würde man weiter bei einem Zufallsexperiment die Menge aller nur denkbaren Ereignisse auflisten, die i. Allg. stets größer als die Menge aller Elementarereignisse ist, so gelangt man zu dem Begriff des **Ereignisraumes** $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dieser stellt eine Potenzmenge von Ω dar. Ein solcher Ereignisraum enthielte bei dem Wurf eines Würfels neben den Elementarereignissen E_1 bis E_6, die obigen Ereignisse E_g und E_{ug} und noch viele Weitere (insgesamt enthält die Potenzmenge von Ω 2^n Elemente, wenn n die Anzahl der Elementarereignisse ist. Siehe hierzu Aufgabe 6c), bei der die Potenzmenge für ein Beispiel aufgelistet wird).

Nun zu etwas anderem:
Um im Folgenden unsere Zufallsexperimente klassifizieren zu können, soll mit Begriffen wie **Merkmal (qualitatives wie quantitatives und diskretes und stetiges quantitative Merkmal)**, **Merkmalsträger**, **Merkmalsausprägung** und **Merkmalswert** gearbeitet werden.[c]
Zufallsexperimente besitzen demnach immer einen **Merkmalsträger** und ein **Merkmal**. Das Merkmal selbst kann bestimmte **Merkmalsausprägungen** annehmen, für die weiterhin, wenn man es mit Zahlen zu tun hat, der Begriff **Merkmalswert** (der Formelbuchstabe hierfür ist x_i oder x) benutzt wird.
Dazu ein paar Beispiele zur Erläuterung: So ist beim Werfen eines Würfels der Würfel der Merkmalsträger, das Merkmal die Augenzahl und die Merkmalsausprägungen oder Merkmalswerte, die die Augenzahlen aufweisen können, die Zahlen 1 bis 6, also $x_1 = 1, ..., x_6 = 6$.

Merkmalsausprägungen, die keine Merkmalswerte – also Zahlenwerte wie beim Würfel - bilden,

---

[a] Anstelle der Schreibweise ω_i bzw. ω für ein Elementarereignis findet man in Wikipedia[3] für diese Buchstaben eine andere Deutungsweise. So kann man den Wurf eines Würfels s e l b s t als ein Ereignis auffassen, der dann alle Elementarereignisse umfasst. Bezeichnet man infolgedessen das „Ereignis“ des ersten Würfelwurfes als ω_1 und das des zweiten als ω_2, so entsteht das Ereignis zweier Würfe als $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, das für die Elementarereignisse zweier Würfe steht. Diese Schreibweise wird in diesem Artikel nicht weiter verfolgt.
[b] Siehe aber S. 17 unten.
[c] Diese Klassifizierung erfolgt nach Robert Müller-Fonfara[4].

sind bei den Beispielen Münze und Kartenspiel gegeben: Merkmalsträger sind hier die Münze oder das Kartenspiel, das Merkmal die Münzseite oder die Kartenart. Die Merkmalsausprägungen sind die Münzseiten Wappen oder Zahlenbild oder die Arten Herz, Karo, Pik und Kreuz.
Weiterhin spricht man bei einem Merkmalsträger bzgl. seines Merkmals von **qualitativen** und **quantitativen Merkmalen**: Ein **qualitatives Merkmal** besteht, wenn als Zufallsergebnis kein Zahlenwert vorliegt. Das ist beim Merkmalsträger Münze der Fall (es soll hier nur das Zahlenbild als solches betrachtet werden). Aber auch beim Merkmalsträger Kartenspiel liegt ein qualitatives Merkmal vor, wenn man wieder an Herz, Karo, Pik und Kreuz denkt. **Quantitative Merkmale** bedingen dagegen einen Zahlenwert, das ist der **Merkmalswert**. Dieser kann seinerseits wiederum diskret oder stetig sein. So besitzt das Beispiel mit dem Würfel und dem quantitativen Merkmal Augenzahl hier die **diskreten Merkmalswerte** 1 bis 6. Diskret eben deshalb, weil es zwischen den Merkmalswerten, z.B. $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, keine weiteren Zahlen gibt.
Im Gegensatz dazu kann bei **stetigen Merkmalswerten**, auf die hier erst pro forma eingegangen wird und die mit x bezeichnet werden, die Zahl x jeden beliebigen Wert in einem bestimmten Intervall annehmen.
Es sei darauf hingewiesen, dass sich jedes qualitative Merkmal durch die Zuordnung von Zahlenwerten theoretisch in ein diskretes quantitatives Merkmal überführen lässt.
Dem Merkmalswert, den ein quantitatives Merkmal annehmen kann, gibt man auch den Namen **Realisation**. So liegen beim Würfelwurf also die Realisationen $x_1 = 1$ bis $x_6 = 6$ vor.

D.4 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Die Ausfälle eines Zufallsexperiments lassen sich natürlich grafisch darstellen. Wir gelangen so zu den **Verteilungen von Zufallsexperimenten**. Dazu werden zunächst nur die Elementarereignisse eines Experiments herangezogen.
Abb. 4.1a zeigt diese exemplarisch für den Wurf eines Würfels. Sie demonstriert, wie die Häufigkeit $h_a(\omega_i)$ der einzelnen Elementarereignisse E_i bzw. ω_i angetroffen werden könnte (die Anzahl der Würfe bzw. Ausfälle m sei in diesem Fall 200). $h_a(\omega_1)$ steht für die Häufigkeit des Elementarereignisses ω_1 mit dem Merkmalswert $x_1 = 1$, $h_a(\omega_2)$ für die des Elementarereignisses ω_2 mit dem Merkmalswert $x_2 = 2$ usw.
$h_a(\omega_i)$ gibt man den Namen **absolute Häufigkeit,** da sie eine absolute Angabe über die Anzahl der Elementarereignisse macht. (Statt $h_a(\omega_i)$ könnte man auch $h_a(E_i)$ oder $h_a(x_i)$ formulieren.)

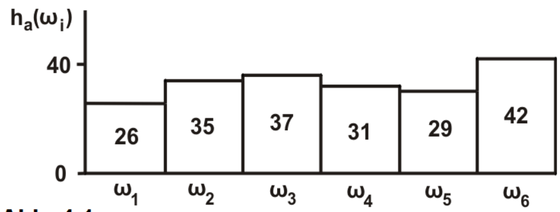

Abb. 4.1a

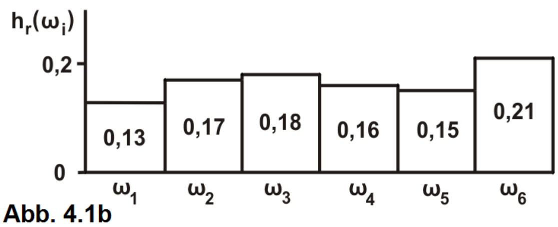

Abb. 4.1b

Da es eigentlich nicht von Belang ist, wie groß die Anzahl m der Ausfälle ist (denn man will sich unabhängig von der Anzahl der ausgeführten Ausfälle machen), geht man häufig zu einer anderen Darstellung über, bei dem die **relative Häufigkeit** $h_r(\omega_i)$ eines Elementarereignisses ω_i ins Spiel kommt. Dabei wird

$$h_r(\omega_i) = \frac{h_a(\omega_i)}{m} \qquad \textit{(D-4.1)}$$

über die einzelnen Elementarereignisse aufgetragen (s. Abb. 4.1b). (Statt $h_r(\omega_i)$ ist ebenfalls wieder $h_r(E_i)$ oder $h_r(x_i)$ möglich.)

Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Summe $\sum_{i=1}^{m} h_r(\omega_i) = 1$ *(D-4.2)*

ist, denn

$$h_r(\omega_1)+h_r(\omega_2)+h_r(\omega_3)+h_r(\omega_4)+h_r(\omega_5)+h_r(\omega_6)=0{,}13+0{,}17+0{,}18+0{,}16+0{,}15+0{,}21$$
$$=\frac{h_a(\omega_1)+h_a(\omega_2)+h_a(\omega_3)+h_a(\omega_4)+h_a(\omega_5)+h_a(\omega_6)}{m}$$

$$=\frac{26+35+37+31+29+42}{200}=1$$ (Weitere Elementarereignisse gibt es nicht.)

Führt man ein Zufallsexperiment viele Male durch, wenn es denn wirklich eines ist, macht man eine erstaunliche Entdeckung: Je größer die Anzahl m der Ausfälle wird, umso mehr streben die einzelnen relativen Häufigkeiten $h_r(\omega_i)$ gegen einen **Grenzwert** - auch als **Grenzzustand** [a] zu verstehen.

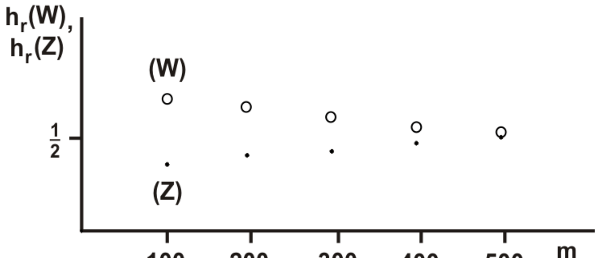

Abb. 4.2

Abb. 4.2 zeigt so einen Verlauf für das Werfen einer Münze, bei der die relativen Häufigkeiten $h_r(W)$ und $h_r(Z)$ gegen m aufgetragen sind.

(W steht für Wappen und Z für Zahlenbild.) Der Grenzwert beträgt hier $h_r(W)_\infty = h_r(Z)_\infty = \frac{1}{2}$

Geht man im Vergleich dazu auf das Zufallsexperiment mit dem des Würfels über, so würde man finden:

$h_r(\omega_1)_\infty = ... = h_r(\omega_6)_\infty = \frac{1}{6}$.

Das Symbol ∞ deutet dabei an, dass die Anzahl der Ausfälle unendlich groß ist. Da man diese Beobachtung bei jedem Zufallsexperiment macht, wurde sie als das **empirische Gesetz der großen Zahl**[b] bezeichnet. Man gibt hierbei dem Grenzwert - bzw. Grenzzustand - jedes Elementarereignisses ω_i den Namen **Wahrscheinlichkeit** P (vom engl. *probability*).

Dieser Sachverhalt lässt sich auf alle **Ereignisse** eines Experiments übertragen, also auch, wenn man Ereignisse betrachtet, für die mehrere Ausgänge gleichzeitig infrage kommen, die somit keine Elementarereignisse mehr sind. Das wird gleich unten an einem Rechenbeispiel noch deutlich werden.

Auf dem Rechnen mit solchen Grenzwerten/Grenzzuständen oder Wahrscheinlichkeiten, wie man jetzt sagen muss, beruht eine ganze Disziplin in der Mathematik, das ist die **Wahrscheinlichkeits-rechnung**. Man hat es dort immer mit Zufallsexperimenten zu tun, bei denen die Anzahl der Ausfälle theoretisch unendlich groß ist.

Da man dies in der Praxis eigentlich nicht erreichen kann, sagt man, dass die Anzahl der Ausfälle bei einem Experiment sehr groß sein muss, um so einigermaßen der theoretischen Forderung nach Unendlichkeit gerecht zu werden.

Man schreibt für $h_r(W)_\infty$ und $h_r(Z)_\infty$ für das Werfen einer Münze die Bezeichnungen $P(W)$ und $P(Z)$, also $P(W) = h_r(W)_\infty$ und $P(Z) = h_r(Z)_\infty$, und weiter für das Werfen eines Würfels – dort liegen die Elementarereignisse E_1 bis E_6 vor -: $P(E_1) = h_r(\omega_1)_\infty, ..., P(E_6) = h_r(\omega_6)_\infty$.

Die **Formelbezeichnung** $P(E_i)$ für ein Elementarereignis oder Ereignis ist dabei die übliche

---

[a] Siehe genauer zum Begriff des Grenzzustandes die Literaturstelle [5].

[b] Nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1655–1705).

Bezeichnung in der Literatur, die andere $h_r(\omega_i)_\infty$ hat nur der Autor hier so gewählt.

Nun zu dem angekündigten Rechenbeispiel:
Will man beim Werfen eines Würfels danach fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, ein bestimmtes Ereignis E_i anzutreffen, so wird dies allgemein über die Formel

$$P(E_i) = \frac{k}{n} \qquad \textit{(D-4.3)}$$

berechnet. k ist die Anzahl der möglichen Ausgänge, die einem Ereignis E_i zugeordnet werden, und n die Anzahl der Ausgänge des Zufallsexperiments überhaupt. Dabei wird in dieser Formel vorausgesetzt, dass jeder Ausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.
Wird einmal danach gefragt, wie groß beim Würfeln die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ ist, ein Ereignis E_1 mit der Augenzahl 1 zu erhalten ($E_1 = \{1\}$), so ist: $P(E_1) = \frac{1}{6}$ (mit $k = 1$ und $n = 6$).
Für $P(E_2)$ mit dem Ereignis $E_2 = E_g$, für das nur die geraden Augenzahlen 2, 4 oder 6 auftreten ($E_2 = \{2,4,6\}$), wäre dann: $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ($k = 3$ und $n = 6$).
Und fragt man, wie die Wahrscheinlichkeit $P(E_3)$ eines Ereignisses E_3 mit der Augenzahl 3 o d e r 5 ($E_3 = \{3,5\}$) ist, so errechnet sich $P(E_3)$ zu $P(E_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ($k = 2$ und $n = 6$).
Folgendes lässt sich an diesem Rechenbeispiel feststellen:
a) Betrachtet man nur die Ausgänge unseres Würfelexperiments, so ist $\sum_{i=1}^{6} P(\omega_i) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Diese Beziehung folgt in gewisser Weise aus Beziehung *(D-4.2)*, nur dass man es hier mit den zugehörigen Grenzwerten bzw. Grenzzuständen $P(\omega_1)$ bis $P(\omega_6)$ zu tun hat und nicht mehr mit den relativen Häufigkeiten. Formuliert man dies allgemein für die Elementarereignisse eines beliebigen Zufallsexperiments, so ist $P(\Omega) = 1$, was selbstverständlich ist, hält man sich die Definition von Ω vor Augen. Man trägt dieser Aussage in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch in Form eines eigenen Axioms Rechnung: $P(\Omega)$ ist hierbei die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses[a], die 1 beträgt. (Eigentlich eine Trivialität.)
b) Schließen die Ereignisse E_1, $E_2 = E_g$ und E_3 einander aus und gibt es keine weiteren Ereignisse, so ist immer

$$\sum_{i=1}^{l} P(E_i) = 1 \ . \qquad \textit{(D-4.4)}$$

(l ist die Anzahl dieser betrachteten Ereignisse des Experiments, in unserem Fall 3.) Das ist verständlich, denn schließt man nach $\sum_{i=1}^{6} P(\omega_i) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ (s. o.) auch Ereignisse ein, die keine Elementarereignisse sind und die sich gegenseitig ausschließen und sind somit alle Ausgänge eines Zufallsexperiments erfasst, so folgt daraus Beziehung *(D-4.4)*. In unserem Würfelspiel ist deswegen: $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$.
Abb. 4.3 und Tabelle 4.1 stellen die Ergebnisse dieses Experiments grafisch dar. Man erkennt in der Mengenschreibweise leicht, das $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$, wenn $E_1 \cap E_2 = \{\}$, $E_2 \cap E_3 = \{\}$ und $E_1 \cap E_3 = \{\}$, letztere also unmögliche Ereignisse darstellen.

---

[a] Ein **sicheres Ereignis** ist ein Ereignis, das mit Sicherheit auftritt. So tritt beim Wurf eines Würfels eine der Augenzahlen von 1 bis 6 mit Sicherheit immer auf. Hingegen spricht man von einem **unmöglichen Ereignis**, wenn dieses nie vorkommt. So können bei dem Wurf mit einem Würfel die Augenzahlen 1 und 2 nie gleichzeitig gewürfelt werden.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit der sich ausschließenden Ereignisse eines Zufallsexperiments ist also in einem Fall wie diesem immer 1. Einzelne denkbare Ereignisse, die nicht auftreten, haben dann aus logischen Gründen die Wahrscheinlichkeit „0“.

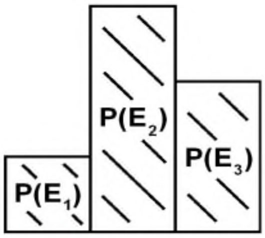

Abb. 4.3

	Würfelzahl	Wert
$P(E_1)$	1	1/6
$P(E_2)$	2, 4 oder 6	1/2
$P(E_3)$	3 oder 5	1/3
$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$		1

Tabelle 4.1

Aus der Definition der relativen Häufigkeiten mit $h_r(\omega_i) = \dfrac{h_a(\omega_i)}{m}$ (s. *(D-4.1)*) ergibt sich, dass die **relative Häufigkeit** eines Ereignisses oder Elementarereignisses immer **nur Werte zwischen 0 und 1** besitzt. Gleiches gilt für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(E_i)$ bzw. $P(E)$, die ja nur Grenzwerte bzw. Grenzzustände der relativen Häufigkeiten darstellen. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeiten als „Maß“ für den Zufall in einem Zufallsexperiment Werte zwischen 0 und 1 erreichen können. Das erklärt das etwas Eigentümliche dieser Rechengröße, die sich so in jeder anschaulichen Darstellung der Wahrscheinlichkeiten widerspiegelt. Diese Aussage ist in seiner Selbstverständlichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls Inhalt eines eigenen Axioms.

Man gibt Abb. 4.3, die hier nur ein sehr einfaches Beispiel ist, den Namen **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, weil sie eine Verteilung aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments ausgibt, gleichfalls unter der Bedingung, dass sie einander ausschließen. Da sie quasi eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit diskreten Merkmalswerten ist, wird sie auch **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** genannt.

Die Formeln bzw. Ausdrücke dieses Unterkapitels seien nunmehr zusammengestellt:

- $h_a(\omega_i)$ (bzw. $h_a(E_i)$ oder $h_a(x_i)$) steht für die **absolute Häufigkeit**
- $h_r(\omega_i) = \dfrac{h_a(\omega_i)}{m}$ ist die Definition der **relativen Häufigkeit**; m = Anzahl der Ausfälle (es ist ebenfalls die Verwendung von $h_r(E_i)$ bzw. $h_r(x_i)$ denkbar)
- $\sum_{i=1}^{m} h_r(\omega_i) = 1$, $\sum_{i=1}^{m} P(\omega_i) = 1$
- $P(E_i)$ ist die **Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis E_i
- $P\left(E_i\right) = \dfrac{k}{n}$, wenn jeder Ausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt. k = Anzahl der möglichen Ausgänge des Ereignisses E_i; n = Anzahl aller Ausgänge des Zufallsexperiments überhaupt.
- $\sum_{i=1}^{m} P\left(E_i\right) = 1$, wobei alle Ereignisse E_i einander ausschließen und zu allen Ausgängen ein Elementarereignis oder Ereignis existiert; alle übrigen denkbaren Ereignisse sind dann „0“.
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)$, wenn die Ereignisse E_i sich paarweise einander ausschließen, also $E_i \cap E_j = \{\}$ für alle $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ mit $i \neq j$.[a]
- $P(\Omega) = 1$ ist offensichtlich, denn die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist immer 1.

[a] Diese Aussage bildet das dritte Axiom der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zusammen mit den beiden obigen Axiomen wurden sie von Kolmogorow (sowjet. Mathematiker, 1903-1987) aufgestellt. Diese bilden das Grundgerüst der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man nennt sie auch schlicht die Axiome der Wahrscheinlichkeit.

Nach all den neu hinzugekommenen Begrifflichkeiten und Formeln, die Ihnen hier begegnet sind, sollten Sie nun vielleicht eine Pause einlegen oder das Bisherige wiederholen, bevor Sie fortfahren. So haben sie immerhin schon einen ersten Einblick in einige Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewonnen.

D.5 Zufall und Wahrscheinlichkeit im Alltag

Nun zu etwas anderem, was eher profaner Natur ist:
Nicht immer hat der Zufall etwas mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit zu tun, wobei dann nicht mehr der Zufall gemeint sein soll, den ich oben als **mathematischen Zufall** behandelt habe und der bis jetzt Gegenstand des Artikels war. Ich komme deshalb im Folgenden auf eine zweite Form des Zufalls zurück, den ich kurz als den **subjektiven Zufall** bezeichnen möchte. Den **objektiven Zufall**, wie er aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgeht, habe ich oben schon als mathematischen Zufall im Unterkapitel D.3 dargestellt. Den oft subjektiv empfundenen Zufall, den es auch gibt, möchte ich mit einem Beispiel erläutern:
Frau Müller kommt aufgeregt nach Hause und überfällt ihren ahnungslosen Lebenspartner mit der Aussage: „Stell dir vor, wen ich heute in der Stadt getroffen habe? Meine alte Schulfreundin Astrid! - Die habe ich seit ewigen Zeiten ja schon nicht mehr gesehen. Was für ein Zufall!“
Nehmen wir diese Art von Zufall genauer unter die Lupe, so können wir sicher sagen, dass es ein unvorhersehbares Ereignis und somit ein zumindest **subjektiv empfundener Zufall** ist. Im Gegensatz zum oben definierten mathematischen Zufall, wie er z. B. beim Würfelspiel auftritt, lässt er sich aber nicht reproduzieren. So können wir auch kein Zufallsexperiment ersinnen, bei dem unter stets gleichen Bedingungen dieser Zufall des Öfteren auftritt. Denn wie wollte man unter exakt gleichen Bedingungen (wie eben beim Würfelspiel möglich) solch einen Zufall immer und immer wieder untersuchen? Wie müssten sogar derartige Bedingungen lauten, damit so ein Zufall wieder hervortreten kann (welche Uhrzeit, welcher Bus wurde genommen, hat vielleicht ein Feiertag vorher oder das Wetter ein Rolle gespielt, befand sich Frau Müller gerade in einer besonderen Stimmung, sodass sie gerade deshalb in die Stadt fuhr)? Kurzum, es ist einfach unmöglich hier einen Rahmen zu schaffen.
Und da man auch nicht stets gleiche Versuchsbedingungen formulieren kann, lässt sich auch nicht das Gesetz der großen Zahl anwenden und somit eine Wahrscheinlichkeitsaussage für diese Art von Zufall machen (wie es beim mathematischen bzw. unserem bisher behandelten Zufall möglich ist).
Man könnte freilich argumentieren, dass auch jeder alltägliche Zufall im Prinzip nur eine Kopplung lauter einfacher mathematischer Zufälle ist, nur dass diese Kopplung so komplex ist, dass wir sie nicht berechnen können. Aber ob Stimmungen, persönliche Entscheidungen und Verfassung, Einflussnahme von anderen etc., die alle hier mit hineingespielt haben mögen, unter die Rubrik von Zufallsexperimenten zu subsummieren sind, das ist eher fraglich und hat mit der mathematischen Untersuchung des Zufalls und deren Begriffsbildungen nichts mehr zu tun.

Nun sei mir des Weiteren noch etwas Philosophie mit den Wörtern „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ erlaubt:
So habe ich weiter oben den Begriff der Wahrscheinlichkeit eingeführt, sodass ich auf eine weitere, zweite Form des Wortes wahrscheinlich bzw. Wahrscheinlichkeit komme (weiter unten werde ich noch eine dritte Form nennen). Nehmen wir dazu einmal die beiden Aussagen: „Wahrscheinlich wird er heute Abend noch vorbeikommen“, oder „Das kennst du wahrscheinlich schon“. – Hier steht das Adjektiv „wahrscheinlich“ für eine **persönliche Einschätzung** – man könnte auch sagen: **Vermutung** -, dem kein Zahlenwert (wie bei einem Zufallsexperiment) zugeordnet werden kann. Diese Form von *wahrscheinlich* können wir ebenso gut durch Ausdrücke wie sicherlich oder bestimmt ersetzen. In ähnlicher Weise verhält es sich mit seiner substantivierten Form in Aussagen wie: „Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass er sein Amt behalten wird“ oder „Aller Wahrscheinlichkeit nach ist das so.“ Hier handelt es sich sodann auch um eine **persönliche**

Einschätzung bzw. **Vermutung** oder auch **Offenkundigkeit**. Diese kann ein Ausdruck von Menschenkenntnis oder Erfahrung sein oder aber auch eine Wahrscheinlichkeit objektiver bzw. mathematischer Zufälle, die man in ihrer Gesamtheit übergreifend abzuschätzen versucht, wie es z. B. bei Spielen immer wieder der Fall ist.
Auch der Ausdruck „mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit“ stellt in diesem Zusammenhang ein geflügeltes Wort dar, das die Einschätzung, dass etwas ganz bestimmt eintritt, wiedergibt.
Benutzt jemand die Wörter *wahrscheinlich* oder *Wahrscheinlichkeit* so im Alltag – also als persönliche Einschätzung bzw. Vermutung oder Offenkundigkeit -, ist dies immer Zeugnis einer Wertung. Will man aber sogar einer solchen Wahrscheinlichkeit einen Zahlenwert zuordnen, ist dies unsinnig. Ein Ausruf: „Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% wird er/sie das getan haben“, ist dann einfach Unfug, da kein Zufallsexperiment ersonnen werden kann, das diesen Zahlenwert wiedergibt. Denn mit dem mathematischen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit bzw. mit dem objektiven Zufall hat das nicht mehr zu tun (wenn auch mit den 99,9% etwas ausgedrückt sein mag, das der Einzuschätzende als evident ansieht). – Es bleibt nun die Erkenntnis, dass diese zweite Verwendung des Wortes *wahrscheinlich* bzw. *Wahrscheinlichkeit* im Alltag als Zeugnis einer Wertung möglicherweise historisch älter [a] als die erste ist und dann für den Wahrscheinlichkeitsbegriff entlehnt wurde, den wir seither von der oben behandelten mathematischen Form der Wahrscheinlichkeitsrechnung her kennen.

Und eine dritte Form der Benutzung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit gibt es noch, die hier nicht fehlen darf:
Dazu gehen wir von einer Äußerung aus, die der Autor in der Mitgliederzeitschrift einer Krankenkasse gefunden hat. Sie lautet: „Die **Wahrscheinlichkeit**, dass Kinder komplett geimpft sind, ist bei Teilnehmern des [...] Kinder- und Jugendprogramms [um] 32 Prozent höher“.[6] Diese Wahrscheinlichkeit ist dabei weder eine Wahrscheinlichkeit, wie man sie beim Würfelspiel antrifft, noch eine Wahrscheinlichkeit, wie sie Ausdruck einer persönlichen Einschätzung bzw. Vermutung oder auch Offenkundigkeit ist (s. o.). Denn bei einem Würfelspiel spricht man nur dann von Wahrscheinlichkeit, wenn reine Zufallsergebnisse vorliegen. Ob die hier angesprochenen Kinder aber komplett geimpft sind, ist nicht primär das Ergebnis von Zufällen. Vielmehr dürfte wohl eine Empfehlung eines öffentlichen Trägers oder eines Politikers vorliegen, der dann die Eltern nachkommen. Die Entscheidung der Eltern ist somit eine *Willensentscheidung* und daher vom Ich oder Wir der Eltern abhängig. Das Ich eines Entscheidungsträgers nun als Zufallsergebnis abtun zu wollen - wie es diesen so speziell beim Würfelspiel gibt -, würde aber jeglicher Person seiner Verantwortlichkeit berauben. Die Folgen einer solchen Interpretation würde den Menschen praktisch nur noch als naturwissenschaftliches Objekt ansehen, der sich auch nicht mehr zu bemühen bräuchte, um nach eigenen Haltungen zu ringen. Somit kann diese Form der Wahrscheinlichkeit hier wohl nicht gemeint sein.
Aber auch der Wahrscheinlichkeitsgebrauch bei einer persönlichen Einschätzung oder Vermutung, die hier als zweite Möglichkeit erläutert wurde, ist fehl am Platze, da dieser Einschätzung sich eben kein Zahlenwert zuordnen lässt (wie es die 32% in diesem Fall wären).

Wer sich mit Statistiken etwas auskennt (und zwar hier mit der deskriptiven Statistik), wird schnell erkennen, dass sich obiges Zitat auf eine Häufigkeitsangabe bezieht und dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit erst einmal durch den der *Häufigkeit* ersetzt werden kann. So könnte es auch heißen: „Die **Häufigkeit**, dass Kinder komplett geimpft sind, ist bei Teilnehmern des [...] Kinder- und Jugendprogramms [um] 32 Prozent höher.“ Jedoch Halt, hier aufgepasst! Während man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer Aussagen trifft, die nach dem Gesetz der großen Zahl gelten, hat man es dagegen in der Statistik zumeist mit einem Dilemma zu tun. Denn dort macht man immer *Stichproben* aus einer *Grundgesamtheit*, bei denen man nur bedingt annehmen kann, dass

[a] So leitet es sich nach dem Duden, Herkunftswörterbuch, von verus (= *lat.* wahr) und similis (= *lat.* ähnlich) her.

sie die volle Wirklichkeit widerspiegeln (Statistiken zur Demografie vielleicht ausgenommen). Und insofern sind solche Stichproben dann auch immer mit einem Fehler behaftet (der freilich umso geringer ausfällt, je größer man den *Stichprobenumfang* wählt). Und hier hat es sich dann eingebürgert, dass man, wenn man über diese Stichprobe spricht, nicht mehr von Häufigkeiten redet, sondern jetzt von **Wahrscheinlichkeiten**. So kennt wohl jeder, wenn er sich um Wetterauskünfte bemüht, den Begriff der *Niederschlagswahrscheinlichkeit*, der, mit einer Zahlenangabe verknüpft, angibt, mit z. B. wie viel Prozent an Regen wir für den nächsten Tag zu rechnen haben. Ebenso hat mancher vielleicht auch davon gehört, dass man auf seinem Computer oder Smartphone eine App installieren kann, die angibt, wie groß die *Einbruchswahrscheinlichkeit* in bestimmten Wohngebieten ist.
Beide Begriffe, der der Niederschlagswahrscheinlichkeit als auch der der Einbruchswahrscheinlichkeit, fußen dabei auf statistischem Material, und es spielt dabei überhaupt keine Rolle, ob diese „Wahrscheinlichkeiten" nur durch den objektiven Zufall bedingt sind oder durch kausale Einflüsse oder vielleicht auch durch die „Launen" von Einbrechern. Immer, wenn man es mit einer statistischen Auswertung zu tun hat, setzt man dabei den Begriff der Wahrscheinlichkeit an. Insofern ist das eingangs erwähnte Zitat über die Wahrscheinlichkeit komplett geimpfter Kinder durchaus richtig, wenn es sich auf eine Statistik bezieht, die über die eben geimpften Kinder gemacht wurde.

Zusammenfassend lässt sich sagen: Es gibt zwei Arten von Zufall. Den **objektiven bzw. mathematischen Zufall**, wie er beim Würfelspiel auftritt und wie er Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist (mit Zahlen zwischen 0 und 1), und der **subjektiv empfundene Zufall**, der sich im Gegensatz zum ersten nicht reproduzieren lässt.
Ferner gibt es drei Bedeutungen beim Wahrscheinlichkeitsbegriff. Einmal die **Wahrscheinlichkeiten** bei Zufallsexperimenten, wie sie uns beim objektiven Zufall begegnen und wie er in den vorherigen Unterkapiteln schon behandelt wurde (beim subjektiv empfundenen Zufall können wir keine Wahrscheinlichkeitsangabe machen), dann die **Wahrscheinlichkeiten** im Alltagsgebrauch, die Ausdruck einer ganz persönlichen Einschätzung, Vermutung oder Offenkundigkeit sind, und schließlich die **Wahrscheinlichkeiten**, die ein Abbild statistischer Untersuchungen sind, bei denen man sich immer nur auf eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit beziehen kann.
Einen Überblick über die drei unterschiedlichen Bedeutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gibt auch noch einmal Aufgabe 9.

D.6 Mehrstufige Zufallsexperimente

Nach dem Ausflug in die alltägliche Verwendung der Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit kommen wir wieder zurück zu unserer mathematischen Behandlung des Zufalls:
Die bis hierhin erwähnten Zufallsexperimente können nun nicht nur einzeln auftreten, sondern sie können auch gekoppelt sein. So ist die Fragestellung erlaubt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einem Würfelwurf 2 Sechsen hintereinander zu würfeln.
Man nennt ein solches Experiment ein **mehrstufiges Zufallsexperiment**, in diesem Fall eines mit 2 Stufen. Der erste Wurf bildet die Stufe Nr. 1 und der zweite Wurf die Stufe Nr. 2. Ebenso kann man fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, 3, 4 oder mehr Sechsen hintereinander zu würfeln. Man hätte es dann mit einem 3-, 4- oder noch höherstufigen Experiment zu tun. Beim 2-stufigen Zufallsexperiment ist die Fragestellung gleichwertig, ob man 2 Sechsen hintereinander würfelt oder mit 2 Würfeln 2 Sechsen gleichzeitig (warum?).
Die Berechnung eines 2-stufigen Zufallsexperiments ist nicht weiter schwierig: Beträgt die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln $P(E_6) = \frac{1}{6}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, davon noch einmal eine Sechs zu erhalten, $\frac{1}{6}$ dieser Größe, also $P(E_6E_6) = {}^{\frac{1}{6}}\!\big/_{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E_6) \cdot P(E_6) = \frac{1}{36}$.

Man sieht, dass zur Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit diese durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten der jeweiligen Stufen errechnet wird. Dies ist eine weitere Gesetzmäßigkeit beim Zufall, wie sie am Anfang dieses Artikels bereits angedeutet wurde und wie sie neben dem empirischen Gesetz der großen Zahl existiert.

Man kann diesen Zusammenhang verallgemeinert über

$$P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdot ... \cdot P(E_{i_s}) = \prod_{j=1}^{s} P(E_{i_j}) \qquad \textit{(D-6.1)}$$

ausdrücken. Dabei ist $i_1, i_2, ..., i_s \leq n$, wobei s ist die Anzahl der Stufen dieses Experiments ist, n die Anzahl der Elementarereignisse bzw. Ausgänge einer Stufe und E_{i_j} das Ereignis einer Stufe. Fragt man mit dieser Formel z. B. danach, wie oft in einem 2-stufigen Würfelspiel zuerst eine 3 und dann eine 4 gewürfelt wird, so ist $s = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 = 4$, $P(E_3) = \frac{1}{6}$, $P(E_4) = \frac{1}{6}$ und damit

$$P(E_3E_4) = P(E_3) \cdot P(E_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Für den speziellen Fall des 2-stufigen Würfelexperiments lässt sich anschaulich der **Ergebnisraum** Ω angeben. Dieser stellt sich mit $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$ *(D-6.2)*
wie in Abb. 6.1 dar. Die fettgedruckten Zahlen sollen darin das Ereignis darstellen, bei dem die Summe der Augenzahlen den Wert 7 ergibt.

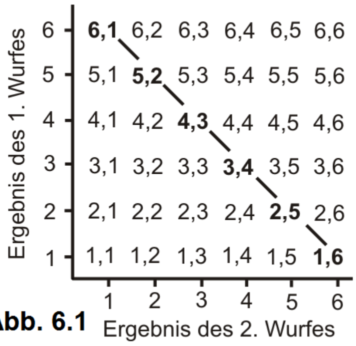

Abb. 6.1

Ein recht interessantes Beispiel für ein mehrstufiges Zufallsexperiment liegt vor, wenn man einen Sack mit 3 schwarzen und 4 weißen Kugeln vorliegen hat und danach fragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit 2 schwarze, 2 weiße oder 1 schwarze und 1 weiße Kugel hintereinander aus dem Sack gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Herausnehmen nicht wieder in den Sack zurückgelegt wird. Auch so etwas kann man mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnen.
Da zweimal gezogen wird, liegt ein 2-stufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen SS, $SW = WS$ und WW (S = schwarz, W = weiß) vor.

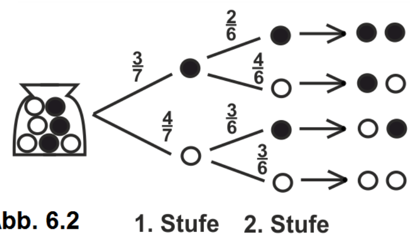

Abb. 6.2

Veranschaulichen lässt sich ein solches Experiment durch ein sog. **Baumdiagramm.** Es sieht in diesem Fall wie folgt aus (s. dazu die Abb. 6.2):
Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel beim ersten Mal zu ziehen, beträgt, da ja 3 schwarze Kugeln vorliegen, $3 \cdot P(S) = 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$. Soll dann wieder eine schwarze Kugel gezogen werden, so stehen – bei insgesamt jetzt 6 Kugeln im Sack – nur noch 2 schwarze zur Verfügung, sodass sich die Wahrscheinlichkeit zu $2 \cdot P(S) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ ergibt. Man tut demnach bei der zweiten Ziehung so, als wenn von Vorneherein die erste Ziehung gar nicht existiert hätte, man also einen Sack von 2 schwarzen und 4 weißen Kugeln vorliegen hat, und berechnet dafür die Wahrscheinlichkeit. Entsprechend lassen sich die anderen Brüche erhalten, was man sich im Einzelnen in Abb. 6.2 klar mache. Für die Wahrscheinlichkeiten der Kombinationen SS, SW bzw. WS und WW geht man dann von den einzelnen Teilwahrscheinlichkeiten entlang eines **Pfades** aus, der zur gewünschten Kombination führt, und multipliziert diese miteinander (ganz analog dem Zufallsexperiment mit den 2 Würfeln). Es ergibt sich somit:

$$P(SS)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7},\ P(WW)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}\text{ und }P(SW)+P(WS)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}\ ,$$

wobei wieder $P(SS)+P(WW)+P(SW)+P(WS)=1$ ist (es liegen keine weiteren Fälle vor). Dies entspricht genau dem Fall mit der Formel *(D-4.4)* aus dem Unterkapitel D.4.

Möchte man für ein mehrstufiges Zufallsexperiment deren Wahrscheinlichkeiten berechnen, so ist zur Veranschaulichung das Aufstellen eines Baumdiagramms immer angebracht, wenn man sich alle einzelnen Fälle dort vergegenwärtigen will. Auf diese Weise gewinnt man schnell einen Überblick darüber, welche Wahrscheinlichkeiten auftreten können.

Man sieht, dass bei Zufallsexperimenten regelrechte **Gesetzmäßigkeiten** auftreten, die bei einfachen (einstufigen) Experimenten die Form von *(D-4.3)* haben und bei mehrstufigen die Form von *(D-6.1)* annehmen.

Bei Letzteren stößt man auf die sog. **Pfadregeln**:
Hierbei ergibt sich der Ausfall eines mehrstufigen Zufallsexperiments – im Beispiel mit den Kugeln ist das z. B. $P(SS)$ - durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten längs des betreffenden Pfades. Dies wird als **Produktregel** bezeichnet.
Ein bestimmtes Ereignis kann man aber auch durch Addition der Wahrscheinlichkeiten von Ausfällen berechnen, die zu diesem Ereignis gehören. Im Beispiel sei dafür das Ereignis $E_{versch.}$ gewählt, bei dem die <u>verschiedenen</u> Farben Schwarz und Weiß gezogen werden ($E_{versch.}=E(SW)+E(WS)$). Da hier die zwei Elementarereignisse SW und WS vorliegen, sind diese zu addieren, um zu $E_{versch.}$ zu gelangen. Dieser Sachverhalt, bei dem mehrere Elementarereignisse zusammengeführt werden, ist unter dem Namen **Summenregel** bekannt.
(Ein ausführliches Beispiel für die Produkt- und Summenregel findet sich in Aufgabe 4).)

Bei all diesen mehrstufigen Zufallsexperimenten gilt stets der Grundsatz, dass sie eigentlich nur gelten, wenn die Anzahl der Ausfälle unendlich hoch ist oder – in der Praxis – man eine sehr hohe Anzahl von ihnen für eine Auswertung zur Verfügung hat. So tritt die Wahrscheinlichkeit $P(SS)$ für den Sack mit den Kugeln genau genommen nur auf, wenn unendlich oft 2 Kugeln hintereinander aus einem vollen (!) Sack gezogen werden. Dies muss man sich immer vor Augen halten! (Das gleiche gilt natürlich für $P(WW)$ und $P(SW)+P(WS)$).

Mehrstufige Zufallsexperimente können manchmal recht komplex sein. Es ist gerade das Anliegen der **Wahrscheinlichkeitsrechnung**, hierfür die entsprechenden Formeln - wie die Produkt- und die Summenregel - aufzustellen. Diese Formeln sind manchmal noch viel umfänglicher, als die hier aufgeführten. Für denjenigen, der sich hier schon besser auskennt, seien die Stichworte „bedingte Wahrscheinlichkeit“ und „Satz von Bayes“ genannt.
Manchmal, wie beim Lotto-Spiel, muss man zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zusätzlich noch die Regeln der Kombinatorik anwenden, was jetzt aber zu weit führt.[a]

Die Pfadregeln und Formeln dieses Unterkapitels sind im Überblick:

---

[a] Wen die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto interessiert, den sei auf das Buch von Robert Müller-Fonfara[8] verwiesen.

- **Produktregel:** Die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls eines mehrstufigen Zufallsexperiments $P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s})$ ergibt sich durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten $P(E_{i_j})$ längs des betreffenden Pfades. Also $P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s}) = P(E_{i_1})\cdot P(E_{i_2})\cdot ...\cdot P(E_{i_s}) = \prod_{j=1}^{s} P(E_{i_j})$, wobei $i_1, i_2, ..., i_s \leq n$ und s die Anzahl der Stufen des Zufallsexperiments, n die Anzahl der Elementarereignisse bzw. Ausgänge einer Stufe und E_{i_j} das Ereignis einer Stufe ist.

- **Summenregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das sich aus mehreren Ausfällen eines mehrstufigen Zufallsexperiments zusammensetzt, ergibt sich durch Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Ausfälle.

D.7 Die Zufallsvariable

Genauso wie eine Variable verschiedene Werte einer Menge annehmen kann (z. B. Werte aus der Menge der reellen Zahlen), kann sie so definiert werden, dass sie als Platzhalter für die Merkmalswerte eines Zufallsexperiments steht. Man gibt dieser Variablen, die stellvertretend für alle Merkmalswerte oder einen Teil von ihnen verwendet wird, einen besonderen Namen und nennt sie **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße**.
Bei unserem oben angeführten Würfelspiel, könnte eine Zufallsvariable also die Werte x_1 bis x_6, wobei hier $x_1 = 1, ..., x_6 = 6$ ist, annehmen. Bezeichnet wird so eine Variable mit den großen Formelbuchstaben X, Y oder Z.
Die- oder derjenige, dem diese Erklärung vielleicht sehr einsichtig erscheinen mag, wird in der Literatur unter dem Begriff der Zufallsvariablen aber etwas anderes finden:
So wird eine Zufallsvariable als eine **Funktion** X definiert, die jedem Elementarereignis ω_i aus der Ergebnismenge Ω genau eine reelle Zahl $X(\omega_i)$ zuordnet. Bei einem Würfelwurf wird dem Elementarereignis ω_1 so die Augenzahl $x_1 = 1$ zugeordnet (es ist $x_1 = X(\omega_1)$), ω_2 der Wert $x_2 = 2$ (es ist $x_2 = X(\omega_2)$) usw.
Man bezeichnet hier die Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ausgang oder Elementarereignis eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl zuordnet, dann als Z u f a l l s v a r i a b l e . So weit die Definition in der Literatur[9,10].
Folgende Gedanken sind m. E. dazu berechtigt:
Dass ein Würfelwurf 6 verschiedene Elementarereignisse aufweist und dass diese die Werte $x_1 = 1$ bis $x_6 = 6$ ergeben, mag die Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ rechtfertigen, die speziell für den zufälligen Charakter der Zuordnung steht. Gewöhnlich wird somit zwischen ω_i als Elementarereignis in Ω und dem Wert, den dieses zufällig in $\mathbb{R}$ annehmen kann, unterschieden.
Allerdings ist eine Begriffsbildung, mit der eine Variable gleichzeitig auch als Funktion (bzw. allgemeiner als Abbildung) bezeichnet wird, sicher nicht sehr schön, hat man doch aus der Schule gelernt, dass eine Variable für einen Platzhalter und eine Funktion für eine besondere Form einer Relation steht – dies also ein Paar völlig verschiedener Schuhe ist. In diesem Zusammenhang wird argumentiert, dass man es bei Zufallsvariablen nur mit „Funktionen zu tun hat, die nicht mit Variablen im üblichen Sinne gleichgesetzt werden dürfen.“ [11] - Was bei diesem Begriff wohl gemeint ist - wenn man diese *Doppelfunktion* entflechten will -, ist der Umstand, dass das Ergebnis einer Abbildung, welches hier reelle Zahlen sind, in einer Variablen aufgenommen werden soll und dass man dieser den besonderen Namen Zufallsvariablen gibt. Die- oder derjenige, der damit in der Praxis umgeht, wird dann aber doch feststellen, dass Zufallsvariablen immer wie reine Variablen eingesetzt werden. (Das wird in den folgenden Ausführungen in diesem Artikel noch deutlich. Mehr dazu unter

der Literaturstelle [12].) Insofern bleibe ich in diesem Artikel bei der eingangs zu diesem Unterkapitel gemachten Erklärung!

Folgende Differenzierung wird für Zufallsvariablen im Weiteren vorgenommen: Steht eine Zufallsvariable für ein Zufallsexperiment mit diskreten Merkmalswerten, so nennt man sie **diskrete Zufallsvariable**, und steht sie für stetige Merkmalswerte, nennt man sie **stetige Zufallsvariable**. Zufallsvariablen schreibt man also groß, wenn sie als Platzhalter für die einzelnen möglichen Merkmalswerte oder, wie man ebenfalls sagt, **Realisationen** stehen. Die Merkmalswerte s e l b s t schreibt man hingegen klein. So stünde $x_1, x_2, ..., x_6$ für die Merkmalswerte bei einem Würfelexperiment (und somit x_i für diskrete Merkmalswerte) und x für die Merkmalswerte bei Zufallsexperimenten mit einem stetigen Verlauf.
Will man trotzdem auf der Zuordnung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ bestehen, ist die Schreibweise wie $x_i = X(\omega_i)$ bzw. $x = X(\omega)$ angebracht. Für den Fall eines Würfels ist dazu $x_i = X(\omega_i)$ wie in Abb. 7.1a dargestellt. Eine Ordnungsrelation, wie $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_6$ entbehrt jedoch jeder Grundlage und hat hier keinen Sinn. Ebenso gut könnte man sich jede andere Anordnung wie z. B. die in Abb. 7.1b vorstellen.
Für eine stetige Zufallsvariable dagegen kann die Funktion $x = X(\omega)$ wie in Abb. 7.2a dargestellt werden. Auch hier entbehrt eine Ordnungsrelation, wie sie durch $\omega_i < \omega_j < \omega_k$ denkbar wäre, jeglicher Grundlage. Eine zur diskreten Zufallsvariablen analoge Darstellung wie in Abb. 7.1b würde dann für einige ω-Werte z. B. die Form von Abb. 7.2b annehmen. (Alle ω-Werte lassen sich jedoch zeichnerisch nicht darstellen, da von ihnen unendlich viele existieren.)
Man beachte, dass in Abb. 7.2b im Intervall $[0, a]$ auf der Ordinaten jeder Merkmalswert x vertreten ist und deshalb $x = X(\omega)$ als **stetig** zu bezeichnen ist, auch wenn keine Ordnungsrelation für ω existiert.

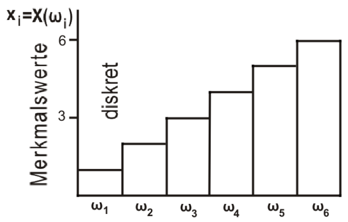

Abb. 7.1a

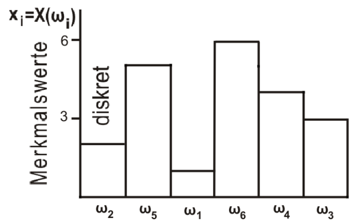

Abb. 7.1b

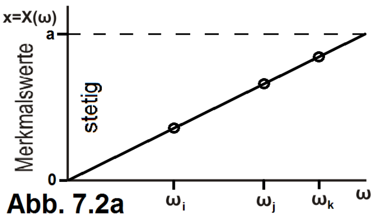

Abb. 7.2a

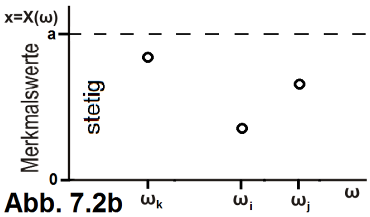

Abb. 7.2b

Der aufmerksame Leser wird vielleicht bemerkt haben, dass für die Menge Ω nach $X: \Omega \to \mathbb{R}$ Elemente der Form $\omega_1, \omega_2, ...$ im diskreten Fall bzw. ω im stetigen Fall auftreten und für $\mathbb{R}$ hingegen die reellen Zahlen. Deshalb wird für einen Würfelwurf die Schreibweise $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ (s. o.) verwendet. Andererseits findet man für Ω weiter oben in diesem Artikel auch die Schreibweise $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, also mit Elementen in Form von <u>reellen Zahlen</u> (s. *(D-6.2)*). Hier gehen in der Literatur die Schreibweisen z. T. durcheinander. (So wird bei L. Papula[13] beides nebeneinander benutzt.) - Korrekt ist es i n j e d e m F a l l , wenn für Ω <u>nur</u> Elemente der Form ω_i bzw. ω aufgeführt werden, also für den Würfel: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, und für $\mathbb{R}$ nur reelle Zahlen wie z. B. $x_i = X(\omega_i)$ bzw. $x = X(\omega)$ (s. die Abb. 7.1 und 7.2).

Mit Zufallsvariablen kann man wie mit normalen Variablen rechnen. Folgende zwei Anwendungen seien dazu genannt:
a) Bei einem Würfelwurf mit 2 Würfeln seien alle Würfe gesucht, bei denen die Summe der Augenzahlen 7 ergibt. Ist X die Zufallsvariable für den ersten Würfel und Y die für den zweiten, kann man statt $x_i + y_j = 7 \wedge i, j \in \{1, ..., 6\}$ kürzer schreiben: $X + Y = 7$. (Als Lösung käme die Menge $\mathbb{L}$ aller 2-tupel infrage mit $\mathbb{L} = \{(x_i, y_j) \mid X = x_i, Y = y_j \wedge X + Y = 7\}$.) Oftmals, wie z. B.

bei $X+Y=11$, erspart man sich mit dieser Schreibweise Überlegungen, welche Werte die Indizes i und j für x_i und y_j annehmen.

b) Eine weitere Schreibweise für Zufallsvariablen findet man bei der Formulierung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis auftritt. Meint man bei einem Würfelwurf mit nur einem Würfel die Wahrscheinlichkeit, eine 3 zu würfeln, so schreibt man statt $P(E_3)$ mit $E_3=\{3\}$ nun $P(X=x_3)$ mit $x_3=3$. Dabei ist $P(E_3)=P(X=x_3)=\frac{1}{6}$ (X steht in diesem Fall für ein Platz-halter mit nur einem Wert).

D.8 Der Erwartungswert

Eine sinnvolle Verwendung des Begriffs der Zufallsvariablen ergibt sich im Zusammenhang mit dem Begriff des Erwartungswertes. Dieser ist eine wichtige Größe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und vor allem in der physikalischen Teildisziplin der Quantenmechanik spielt er eine **zentrale Rolle**. Um zu einer Vorstellung darüber zu gelangen, was man unter einem Erwartungswert versteht, diene nun das folgende Beispiel zur Motivation:

Wer seine monatlichen Ausgaben, über die Jahre verteilt, ausrechnen möchte, tut sicher nicht gut daran, wenn er die einzelnen Ausgabeposten nimmt und einfach daraus den Mittelwert bildet, um zu einer Abschätzung über den Wert der Ausgaben, der ihn von Monat zu Monat erwartet, zu gelangen. So wird er bei einer Berechnung den Kauf eines Autos, der bei ihm alle 10 Jahre mit 15000 € ansteht, und den Kauf eines Computers mit 600 € alle 5 Jahre niedriger einstufen müssen als z. B. die Lebensmittelausgaben, die bei ihm Monat für Monat mit 150 € zu Buche schlagen. Denn er kann nicht einfach hergehen und den Mittelwert $\overline{x}$ aus all seinen Zahlen bilden, die dann für jeden Monat stehen sollen. Kurzum, er muss die relative Häufigkeit aller Ausgaben in einem Zeitraum, der hier 10 Jahre betragen soll, berücksichtigen. Daraus erhält er dann seinen monatlichen Wert.

Möchte er diesen, der mit $y_{Erw.}$ bezeichnet werden soll, ausrechnen, so kann er das mit folgender Formel tun:

$$y_{Erw.}=x_1\cdot h_r(x_1)+x_2\cdot h_r(x_2)+...+x_n\cdot h_r(x_n) \qquad \textit{(D-8.1)}$$

Im Einzelnen ist dabei:

$y_{Erw.}$: zu erwartende monatliche Ausgaben
x_i : Höhe eines Ausgabepostens
$h_r(x_i)$: relative Häufigkeit, mit der x_i in einem bestimmten Zeitraum (hier 10 Jahre) vorkommt

und da $h_r(x_i)=\frac{h_a(x_i)}{m}$, ist

$h_a(x_i)$: absolute Häufigkeit, mit der x_i in – hier - 10 Jahren vorkommt, d. h. wie oft ein Posten auftritt
m : Anzahl aller Ausgaben in $12\cdot 10$ Monaten (A 10 Jahren)

Für das obige Beispiel ist:

$x_1=15000€$, $h_a(x_1)=1$ (das Auto kauft er nur einmal in 10 Jahren);
$x_2=600€$, $h_a(x_2)=2$ (der Computer wird 2-mal in 10 Jahren gekauft);
$x_3=150€$, $h_a(x_3)=12\cdot 10$ (die Lebensmittelausgaben fallen für ihn Monat für Monat an, also

$(12 \cdot 10)$-mal in 10 Jahren).

$$m = h_a(x_1) + h_a(x_2) + h_a(x_3) + m_{weitere} = 1 + 2 + 12 \cdot 10 + m_{weitere} \qquad \textit{(D-8.2)}$$

$$\Rightarrow y_{Erw.} = x_1 \cdot h_r(x_1) + x_2 \cdot h_r(x_2) + x_3 \cdot h_r(x_3) + ... = x_1 \cdot \frac{h_a(x_1)}{m} + x_2 \cdot \frac{h_a(x_2)}{m} + x_3 \cdot \frac{h_a(x_3)}{m} + ... \qquad \textit{(D-8.3)}$$

$$= \frac{1}{m}\{x_1 \cdot h_a(x_1) + x_2 \cdot h_a(x_2) + x_3 \cdot h_a(x_3) + ...\} \qquad \textit{(D-8.4)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + 12 \cdot 10 + m_{weitere}}(15000€ \cdot 1 + 600€ \cdot 2 + 150€ \cdot 12 \cdot 10 + ...) \qquad \textit{(D-8.5)}$$

Wäre $m_{weitere} = 0$, gäbe es also keine weiteren Ausgabeposten, so ergibt sich $y_{Erw.}$ zu 278 €. Er muss demnach im Schnitt 278 € pro Monat ausgeben, um sich Miete, Auto und Computer in 10 Jahren leisten zu können. Das wäre der Wert, der ihn monatlich erwartet, bzw. sein **Erwartungswert**.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der ja Zufallsexperimente zugrunde liegen, kann man ebenfalls einen solchen Wert errechnen. Nur mittelt man dort nicht über die Höhe der Ausgabeposten, die man mit der notwendigen Einstufung (s. $h_r(x_i)$ in obiger Formel) versieht, sondern über die Merkmalswerte x_i, die man dann mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens multipliziert. Dies sei näher erläutert:
Hat man in obigem Beispiel noch durch die Anzahl aller Ausgaben (dort in 10 Jahren) dividiert, muss man dies bei einem Zufallsexperiment bei einer insgesamt endlichen Anzahl von Ausfällen durch die Anzahl aller Ausfälle tun.
Man gelangt so, ganz analog zu Beziehung *(D-8.1)*, zu einem Erwartungswert der Form

$$E(X) = x_1 \cdot h_r(x_1) + x_2 \cdot h_r(x_2) + ... + x_n \cdot h_r(x_n) \qquad \textit{(D-8.6)}$$

Hierbei hat man n verschiedene Merkmalswerte vorliegen und $h_r(x_i) = \frac{h_a(x_i)}{m}$ bezieht sich auf die relativen Häufigkeiten der Merkmalswerte x_i. Weiter ist $h_a(x_i)$ die absolute Häufigkeit, mit der ein Merkmalswert x_i auftritt und m die Anzahl der Ausfälle des Zufallsexperiments.

Geht man von einem Zufallsexperiment mit m Ausfällen zu einem mit einer <u>unendlich großen Anzahl</u> von Ausfällen über, so ist $h_r(x_i)$ nun weiter durch $P(X = x_i)$ zu ersetzen. Man gelangt so schließlich zur allgemeinen Formel eines **Erwartungswertes für Zufallsexperimente**:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) \qquad \textit{(D-8.7)}$$

Es ist zu betonen, dass sich diese Formel nur auf Zufallsexperimente mit diskreten Merkmalswerten bezieht.
Betrachtet man die Zufallsvariablen in dieser Formel, so steht auf der rechten Seite die Zufallsvariable $X = x_i$ in dem Ausdruck $P(X = x_i)$ als Platzhalter für eine Zufallsvariable mit jeweils nur einem Wert (nämlich x_i). Auf der linken Seite hingegen steht im Ausdruck $E(X)$ die Zufallsvariable als Platzhalter für alle möglichen Werte $x_1, ..., x_n$. Soweit sei also die Einsatzmöglichkeit der Zufallsvariablen bzw. -größe genannt, auf die weiter oben schon hingewiesen wurde.

Als <u>Beispiel</u> für den Erwartungswert eines Zufallsexperiments sei folgender Fall betrachtet:

Es läge der Wurf eines Würfels vor, der sich aber nicht ideal verhalten soll (z. B. weil sein Schwerpunkt nicht im Zentrum liegt). Bei ihm sei $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{9}$ und $P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{2}{9}$. Es würde sich dann $E(X)$ gemäß *(D-8.7)* zu

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{2}{9}=4 \qquad \textit{(D-8.8)}$$

berechnen. Der **Mittelwert** $\bar{x}$ aller Merkmalwerte x_i für diesen Würfel ergäbe sich jedoch zu

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3{,}5\,. \qquad \textit{(D-8.9)}$$

Man sieht hier gut, dass Erwartungswert und Mittelwert durchaus nicht dasselbe sind. Dies verhält sich gleich unserem Beispiel, bei dem man die monatlichen Ausgaben auch nicht über die Höhe aller Ausgabenposten allein ermitteln konnte. Nur bei einem idealen Würfel wären Erwartungswert und Mittelwert, bedingt durch die gleichen Wahrscheinlichkeiten, identisch. (Es ist dort

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot P(X=x_i)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{6}=\bar{x}=3{,}5\,.) \qquad \textit{(D-8.10)}$$

Allgemein gilt deswegen, dass man den **Erwartungswert** als den Wert erhält, den man **für alle Ausfälle eines Zufallsexperiments** (eigentlich über unendlich viele) **erwartet** (s. dazu Abb. 8.1 für das Beispiel des nicht-idealen Würfels: Die Größe der Flächen oberhalb der gestrichelten Linie muss dann gleich der Größe der fehlenden Flächen unterhalb der gestrichelten Linie sein).

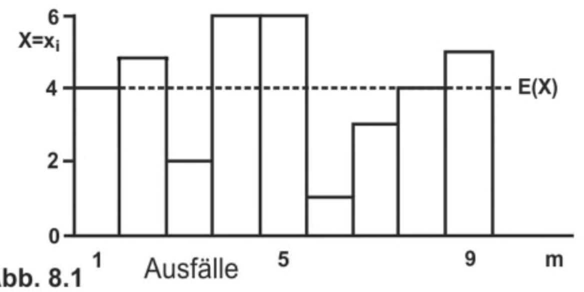

Abb. 8.1

Eine Mittelung über die **möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments** dagegen, zeigt Abb. 8.2. Sie stellt eine Mittelung über alle Ausgänge eines Zufallsexperiments dar, die dann den Mittelwert $\bar{x}$ ergibt, und ist deutlich vom Erwartungswert zu unterscheiden.[a]

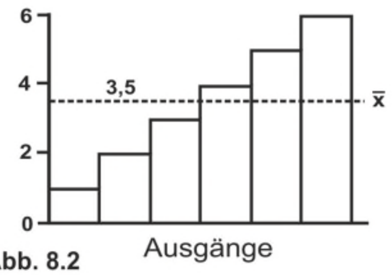

Abb. 8.2

Die beiden wesentlichen Formeln aus diesem Unterkapitel sind somit:

[a] In der Physik und in der Physikalischen Chemie trifft man unglücklicherweise für $E(X)$ die Schreibweise $\bar{x}$ an. Dieses $\bar{x}$ hat jedoch nichts mit dem Mittelwert $\bar{x}$ wie in *(D-8.9)* zu tun. Man muss also zwischen der **Mittelung über die Ausgänge** und der **Mittelung über die Ausfälle** eines Zufallsexperiments unterscheiden, die manchmal beide mit $\bar{x}$ bezeichnet werden, was etwas verwirrend ist. Siehe a) Gordon M. Barrow[14], dort $\bar{P}$ im Sinne eines Erwartungswertes und b) Dieter Meschede[15], dort $\bar{x}$ ebenfalls im Sinne eines Erwartungswertes.

- Die Formel für die Berechnung des Erwartungswertes in einem Zufallsexperiment mit diskreten Merkmalsausprägungen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

- Die Formel für die Berechnung eines Mittelwertes $\overline{x}$: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

D.9 Varianz und Standardabweichung

Möchte man einen Anhaltspunkt dafür haben, wie stark die Ergebnisse eines Zufallsexperiments um einen bestimmten Erwartungswert streuen, so liefert der Begriff der Varianz und der der Standardabweichung hier ein gutes Kriterium. So zeigen die Abb. 9.1a und 9.1b zwei Zufallsexperimente, die zwar beide den gleichen Erwartungswert besitzen, jedoch im Mittel verschieden um diesen streuen. Dabei sind die Abweichungen von Abb. 9.1a etwas niedriger als die von Abb. 9.1b. (Man vergleiche dazu einmal genau die Flächen oberhalb und unterhalb der gestrichelten Linie.)
Um, mathematisch gesehen, diesen Sachverhalt ausdrücken zu können, führt man den Begriff der Varianz und - als Wurzel aus dieser - den Begriff der Standardabweichung ein.
Man interessiert sich also für die Differenz $|x_i - E(X)|$, oder, wenn man $E(X)$ mit μ bezeichnet, für $|x_i - \mu|$. (Die Betragsangabe muss deswegen stehen, weil bei einer Addition verschiedener Abweichungen sich positive und negative Abweichungen sonst gegeneinander aufheben würden, wie aus Formel *(D-9.2)* ersichtlich ist.)
Somit erhält man für die mittlere Abweichung $\overline{\sigma}$

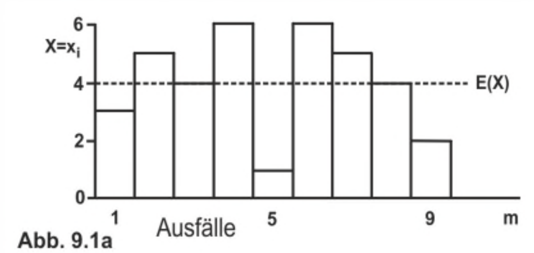

Abb. 9.1a

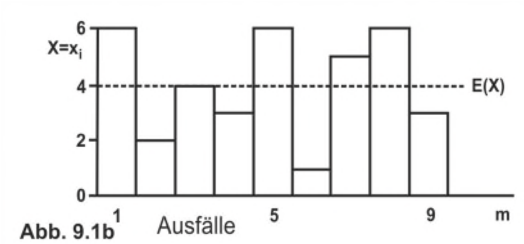

Abb. 9.1b

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \cdot h_r(x_i) \qquad \textit{(D-9.1)}$$

bei einer endlichen Anzahl von Ausfällen (ganz analog zur Beziehung *(D-8.6)*). Und für unendlich viele Ausfälle erhielte man dann wiederum [a]

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \cdot P(X = x_i) \qquad \textit{(D-9.2)}$$

(ganz analog zu Beziehung *(D-8.7)*).
Ein Kriterium für die Streuung wird aber ebenso erhalten, wenn man statt der Größe $|x_i - \mu|$ das Quadrat $(x_i - \mu)^2$ betrachtet, also man statt der einzelnen Glieder diese ins Quadrat nimmt, wie es in der Literatur üblich ist. Dies ist in der heutigen Zeit ein wenig praktischer, da auf Taschenrechnern die Betragsfunktion nicht immer vorhanden ist.

[a] Diese Definition wird in der Literatur leider so nicht verwendet, obwohl sie dem Verständnis eigentlich eher entspricht, und wird hier nur aus Gründen der Klarheit zur Einführung in die Thematik aufgestellt.

Dem Wert $V(X)$ mit

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \qquad (D\text{-}9.3)$$

wird nun der Name **Varianz** gegeben. Qualitativ haben *(D-9.2)* und *(D-9.3)* dieselbe Aussagekraft, quantitativ betrachtet liefern sie aber unterschiedliche Werte.
Der Wurzel aus der Varianz gibt man den Namen **Standardabweichung** und dieser den Formelbuchstaben σ . Es ist also $\sigma = \sqrt{V(X)}$. *(D-9.4)*

Vom Verständnis her ist $|x_i - \mu|$ also natürlicher, historisch wurde jedoch – wie angeführt - ein anderer Weg beschritten, nämlich den der Varianz mit den Gliedern $(x_i - \mu)^2$, was man sich dann einfach merken muss.

Man beachte, dass bei Ziehung der Wurzel aus $V(X)$ zum Erhalt von σ die Größen $\overline{\sigma}$ und σ durchaus nicht identisch sind. Wen das genauer interessiert, der vergegenwärtige sich dazu das folgende Rechenbeispiel:
Hat man einen Würfel, bei dem nur drei Zahlen „würfelbar" sein sollen mit $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 5;$ (z. B. dadurch, dass die Seitenflächen mit $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ je einmal auf dem Würfel vertreten sind, die Seitenfläche mit $x_3 = 5$ jedoch 4-mal auftritt [a]), so ist mit $P(X = x_1) = P(X = x_2) = \frac{1}{6}$,
$P(X = x_3) = 4/6 = \frac{2}{3}$ und mit $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X = x_i)$:
$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{3} = 1/3 + 0{,}5 + 3\,1/3 \approx 4{,}17 = \mu$. Daraus folgt nach Beziehung *(D-9.2)*:
$\overline{\sigma} \approx |2 - 4{,}17| \cdot \frac{1}{6} + |3 - 4{,}17| \cdot \frac{1}{6} + |5 - 4{,}17| \cdot \frac{2}{3} = 1{,}11$
Andererseits ist nach Beziehung *(D-9.3)*:
$V(X) \approx (2 - 4{,}17)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 4{,}17)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 4{,}17)^2 \cdot \frac{2}{3} = 1{,}47$ und damit $\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}21$.
Man sieht, dass $\overline{\sigma}$ und σ nicht dieselben Werte liefern.

> Die aus diesem Unterkapitel wichtigen Formeln sind somit
>
> a) für die Varianz: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ und
>
> b) für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

[a] Nach einer Idee in dem Buch von Yára Detert, Christa Söhl[16], S.103, Aufgabe 2.

D.10 Zusammenfassung

Sofern nicht schon am Ende der einzelnen Unterkapitel aufgeführt, enthält dieser Artikel folgende Aussagen:

- Es gibt zufällig und gesetzlich bzw. kausal bedingte Sachverhalte in der Welt.
- Der mathematische Zufall lässt sich nicht austricksen. Er ist in den Natur- und Ingenieurwissenschaften als wertfrei anzusehen.
- Ein Vorgang, der unter stets gleichen Bedingungen wiederholt werden kann, bei denen ausschließlich der Zufall auftritt, stellt ein Zufallsexperiment dar.
- Die Wahrscheinlichkeit entspricht einem Grenzwert – man könnte auch sagen: einem Grenzzustand - eines Ereignisses in einem Zufallsexperiment. Dieser Sachverhalt wird auch als empirisches Gesetz der großen Zahl bezeichnet. Sie nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, die als „Maß“ für den mathematischen Zufall dienen.
- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es u. a. darum, die Wahrscheinlichkeiten von jeweils unterschiedlich kombinierten Zufallsexperimenten zu berechnen sowie Kenngrößen über die Verteilungen dieser, wie Erwartungswert, Varianz oder Standardabweichung, zu erhalten.
- Da man Mengen von Ereignissen definieren kann, ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch die Mengenschreibweise zulässig.
- Nicht alles, was wir im Alltag als Zufall bezeichnen, kann mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage verknüpft werden.
- Die Verwendung des Wortes „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ steht im allgemeinen Sprachgebrauch oft für eine persönliche Einschätzung, Vermutung oder Offenkundigkeit; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie jedoch stets an das Vorhandensein von Zufallsexperimenten gebunden. Ferner versteht man unter einer Wahrscheinlichkeit, wenn sie im Zusammenhang mit statistischen Untersuchungen steht, eine Häufigkeitsangabe, die Ausdruck einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit ist.

D.11 Aufgaben

1.) Nennen Sie gesetzlich bedingte Sachverhalte in der Mathematik oder in den Naturwissenschaften, für die sich keine Ursache ausmachen lässt. (Gesetze in der Mathematik, die das Ergebnis von Folgerungen sind, z. B. die Potenzgesetze, sind hier ausdrücklich nicht gemeint.)

Genannt seien 3 Beispiele:

a) Für das empirische Gesetz der großen Zahl bei Zufallsexperimenten lässt sich keine Ursache angeben.
b) Das 1. Newtonsche Axiom, nachdem ein Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung verharrt, solange keine äußere Kraft auf ihn einwirkt, bedarf ebenfalls keiner Ursache.
c) Dass sich Licht im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet, lässt sich gleichfalls nicht begründen (jedenfalls noch nicht).

2.) Ein zweistufiges Zufallsexperiment soll mit 2 Würfeln durchgeführt werden. Dabei wird gefragt, wann das Ereignis eintritt, bei dem die Summe der Augenzahlen durch 5 teilbar ist. (Es ist also $X = X_1 + X_2 = 5 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$.) Zeichnen Sie dazu alle entsprechenden Elementarereignisse analog zu Abb. 6.1 auf. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

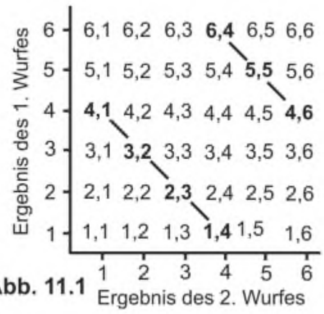

Abb. 11.1

Die fett hervorgehobenen Zahlenpaare (s. Abb. 11.1) stellen die Elementarereignisse dar. Die Wahrscheinlichkeit errechnet sich nach $P(E) = \frac{k}{n}$. Nach Abb. 11.1 ergibt sich: $k = 7$ und $n = 36$, woraus folgt: $P(E) = \frac{7}{36}$

3.) In einem Sack sollen sich eine weiße (W), zwei graue (G) und vier rote (R) Kugeln befinden. Nacheinander sollen 2 Kugeln aus dem Sack gezogen werden. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm, wenn
a) die erste Kugel vor dem zweiten Ziehen wieder in den Sack zurückgelegt und
b) nicht wieder zurückgelegt wird.

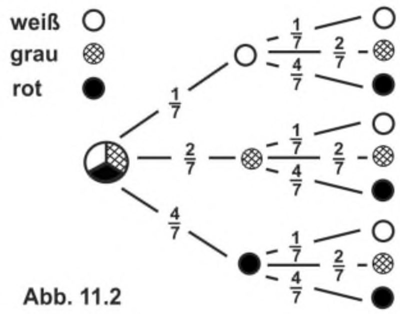

Abb. 11.2

a) Wird die Kugel wieder zurückgelegt, so ist die 2. Stufe (da ja die gleichen Verhältnisse vorliegen) genauso zu behandeln wie die 1. Es ist $P(W) = \frac{k}{n} = \frac{1}{7}$, $P(G) = \frac{2}{7}$ und $P(R) = \frac{4}{7}$. Damit gehen von jedem Knoten einer Stufe 3 Äste aus (s. Abb. 11.2).

b) Wird nicht zurückgelegt, so hat man für die 2. Stufe neue Verhältnisse vorliegen. (Man muss dann im Endeffekt für jede Ziehung so tun, als wenn von Vorneherein der Sack schon so gefüllt war.) Errechnet man z. B. die Wahrscheinlichkeit $P(G)$ für den Pfad WG, so ergibt sich: $P(G) = \frac{k}{n} = \frac{2}{6}$ (es liegen ja nur 2 graue und 4 rote Kugeln vor). Insgesamt folgt damit Abb. 11.3.

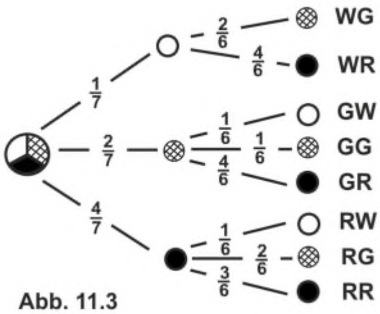

Abb. 11.3

4.) Man berechne anhand des Baumdiagramms in Abb. 11.3 die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Ziehen von 2 Kugeln ohne Zurücklegen mindestens eine graue Kugel zieht.

Es kommen dazu nur die Pfade der Ziehungen WG, GW, GG, GR und RG infrage, da sie mindestens eine graue Kugel aufweisen.
Nach der Produktregel ist:
$P(WG) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6}$; $P(GW) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$; $P(GG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$; $P(GR) = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}$ und $P(RG) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit für alle diese Fälle beträgt nach der Summenregel:

$$P(\text{ mindestens eine graue Kugel }) = P(WG) + P(GW) + P(GG) + P(GR) + P(RG)$$

$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{4}{21}+\frac{4}{21}=\frac{11}{21}=0,52$$

5.) Eine Münze soll 2-mal geworfen werden, wobei die Anzahl der Würfe, bei denen das Wappen auftritt, gezählt wird. Geben Sie
a) die Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments mit den zugehörigen Realisationen an
b) die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen die jeweiligen Elementarereignisse auftreten
c) die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ an, also die Menge der möglichen Ereignisse dieses Experiments überhaupt. Man beachte dabei, dass ein Ereignis mehrere Ausgänge haben kann.

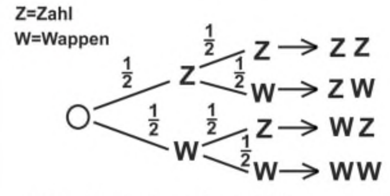

Abb. 11.4

a) Das Wappen kann also 0-, 1- bzw. 2-mal auftreten. Folglich existieren die Elementarereignisse ω_1 mit $x_1=0$, ω_2 mit $x_2=1$ und ω_3 mit $x_3=2$.

b) Will man alle Ausgänge einer 2-mal geworfenen Münze darstellen, so erhält man das 2-stufige Baumdiagramm in Abb. 11.4. Es ergeben sich dabei 4 Ausgänge. Daraus leiten sich die Elementarereignisse mit 0, 1 bzw. 2 Wappen als Realisationen ab:
Jeder Ausgang des Diagramms tritt mit der Wahrscheinlichkeit $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (das Experiment ist 2-stufig!) auf. Für ω_1 mit $x_1=0$ gibt es einen Ausgang (ZZ), sodass $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$. Für ω_2 mit $x_2=1$ gelten die Ausgänge WZ und ZW, sodass $P(\omega_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (Summenregel) . Für ω_3 mit $x_3=2$ tritt nur ein Ausgang überhaupt auf (d. i. der Ausgang WW), es ist also $P(\omega_3)=\frac{1}{4}$.
Zur Überprüfung erhält man:

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{1+2+1}{4}=1.$$

c) Für $\mathfrak{P}(\Omega)$ erhält man 2^n Teilmengen, wobei $n=3$ ist (das ist die Anzahl der Elementarereignisse). Somit ist:
$\mathfrak{P}(\Omega)=\{\varnothing,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_1\vee\omega_3,\omega_1\vee\omega_2,\omega_2\vee\omega_3,\omega_1\vee\omega_2\vee\omega_3\}$ (ergibt zusammen 8 Ereignisse; die leere Menge $\varnothing$ steht für das unmögliche Ereignis, z. B. als $\omega_1\wedge\omega_2$).

Man sieht hier also, dass bei einem Zufallsexperiment die Elementarereignisse nicht von den beiden Ausgängen einer Münze ausgehen müssen, sondern ebenso durch die Anzahl der Würfe als Ausgänge gegeben sein können, bei denen wie in diesem Fall nur das Wappen auftritt.

6.) Ein nicht-idealer Würfel besäße für die jeweiligen Augenzahlen 1 bis 6 mit den zugehörigen Elementarereignissen $E_1,E_2,...,E_6$ folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(E_1)=\frac{1}{18},\ P(E_2)=P(E_3)=P(E_4)=P(E_5)=\frac{1}{6} \text{ und } P(E_6)=\frac{5}{18}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$, der sich für alle Ausfälle dieses Zufallsexperiments im Mittel ergibt.

$$\text{Es ist } E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(X=x_i)=1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{5}{18}=\frac{73}{18}=4{,}0\overline{5}$$

7.) In dieser Aufgabe soll an einem Beispiel einmal genau durchgerechnet werden, wie es sich damit verhält, den mathematischen Zufall austricksen zu wollen. Dies ist ja immer wieder ein viel gehegter Wunsch in Lotto-Spielen. Der Einfachheit halber wird hier nur der Wurf einer Münze untersucht, aber das Beispiel ließe sich genauso auch auf das Lottospielen übertragen.

Die Spieler A und B spielen also das Münzwurf-Spiel. Für jeden richtig vorhergesagten Wurf erhält jeder der Spieler 10 Cent, für jeden falsch vorhergesagten Wurf muss er 10 Cent abgeben. Bei diesem Spiel haben die Spieler A und B unterschiedliche Spielstrategien: Denn Spieler A spielt normal und versucht jeden Ausfall vorherzusagen, also, ob Wappen oder Zahlenbild geworfen wird. Spieler B hingegen ist listig und denkt sich: „Ich werd‘ versuchen den Zufall auszutricksen“, und er hat folgenden Plan: Er sagt immer nur dann „Zahl“ voraus, wenn gerade zuvor „Wappen“ gefallen ist. Denn, so denkt er, es ist unwahrscheinlicher, dass 2-mal „Wappen“ hintereinander geworfen wird, als dass „Zahl“ fällt. Bei „Zahl“ sagt er nichts. - Die Frage ist nun in dieser Aufgabe: Hat er recht, und kann er auf diese Weise tatsächlich als Gewinner mit dem meisten Geld aus dem Spiel hervortreten? –
Zur Erläuterung: Für eine Beurteilung, ob Spieler A mit Gewinnen oder Verlusten das Spiel verlässt, genügt es, die Wahrscheinlichkeiten jedes vorausgesagten „Wappen“- oder „Zahl“-Wurfes zu berechnen. Nach dem Gesetz der großen Zahl gilt für jeden Münzwurf: $P(W)=\frac{1}{2}$ und $P(Z)=\frac{1}{2}$. Da beide Ausprägungen gleich wahrscheinlich sind, wird er in etwa gleich viele Treffer wie Fehlaussagen erzielen, und dies umso eher, je länger die Spieldauer ist. Spieler A wird demnach in etwa pari mit seinen Vorhersagen ausgehen und wohl sein eingesetztes Geld behalten.
Wie sieht das aber bei Spieler B aus, der den Zufall auszutricksen gedenkt? Seine Idee ist, dass dieselbe Merkmalsausprägung nur mit geringer Wahrscheinlichkeit mehrmals hintereinander ausfällt. Er denkt so: $P(W,W)=\frac{1}{4}$ (das ist nach der Produktregel die Wahrscheinlichkeit zweier gleicher Merkmalsausprägungen hintereinander), aber $P(Z)=\frac{1}{2}$, und damit wird er nach seiner Ansicht häufiger „Zahl“ erzielen und gewinnen. Stimmt das also?

Um zu einer genauen Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass auf „Wappen“ wieder „Wappen“ folgt, zu gelangen, müssen wir bedenken, dass der Gedanke von Spieler B nicht ganz vollständig ist. Es ist zwar richtig, dass zwei „Wappen“-Würfe hintereinander unwahrscheinlicher als ein einzelner Wurf von „Zahl“ sind, aber woher weiß Spieler B denn, dass das Auftreten von zwei „Wappen“-Würfen hintereinander nicht auch Teil eines Auftretens von 3-, 4- und mehr Würfen des „Wappens“ hintereinander sein kann, was auch möglich ist? Für eine genaue Berechnung seiner Wahrscheinlichkeitsvorstellung müssten diese Fälle nämlich alle noch hinzuaddiert werden.
Es ist also zu bilden:

$$P(Gesamt)=P(W,W)+P(W,W,W)+P(W,W,W,W)+P(W,W,W,W,W)+\ldots$$

Das wären jetzt unendlich viele Glieder, wenn man das Gesetz der großen Zahl annimmt. Setzen wir die entsprechenden Werte ein, so ist

$$P(Gesamt) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + ... = \frac{1}{2},$$

gemäß der Produktregel, wie sie für mehrstufige Zufallsexperimente gilt, und dem Gesetz der großen Zahl bei unendlich vielen Gliedern.

Die Rechnung zeigt also, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der auf ein Wappen mindestens ein Wappen folgt, genauso hoch ist, wie die, mit der Spieler B ein Zahlenbild ($P(Z) = \frac{1}{2}$) erwarten würde.
Er wird aller Wahrscheinlichkeit nach ebenso pari aus dem Spiel mit seinen Einsätzen heraustreten wie Spieler A, der bei jedem Wurf setzt.

Die Berechnung eines Zufallsexperiments zeigt an diesem Beispiel sehr deutlich, dass sich der Zufall nicht austricksen lässt.

8.) Ein älterer Mensch sagt: „Je älter man wird, desto wahrscheinlicher ist es, dass man stirbt. Welche der drei Bedeutungen von wahrscheinlich bzw. Wahrscheinlichkeit aus dem Unterkapi-Tel D.5 „Zufall und Wahrscheinlichkeit im Alltag“ liegt hier vor?

Da sich für den Sterbezeitpunkt kein Zufallsexperiment aufstellen lässt, liegt hier auf jeden Fall kein objektiver bzw. mathematisch bedingter Zufall vor. Es lässt sich also keine Wahrscheinlichkeitsangabe machen, wie es z. B. beim Würfelspiel möglich ist. Aber auch ein Wahrscheinlichkeitsgebrauch, wie er für gewöhnlich im Alltag vorkommt und der Ausdruck einer persönlichen Einschätzung oder Vermutung ist, trifft nicht so recht zu. Denn wie wollte jemand schon so richtig einschätzen können, wann er stirbt? Ein älterer Mensch kann zwar behaupten, dass, wenn er älter wird, er seinem möglichen Sterbezeitpunkt näher kommt, doch fehlt ihm meistens dazu jedes Gefühl, auch wenn er merkt, dass er zunehmend gebrechlicher wird, und somit steht es auch um eine diesbezügliche Vermutung schlecht.
Was jedoch jeder Mensch tun kann, wenn er über einen Zeitraum verfolgt, wie die Häufigkeiten von Menschen seines Alters sich verteilen, die bereits vor ihm gestorben sind, ist, dass die Häufigkeit der Menschen, die noch eine Lebensspanne vor ihm zu erwarten haben, immer mehr abnimmt. Insofern kann er aufgrund von Extrapolation prognostizieren, dass es mit zunehmendem Alter wahrscheinlicher ist zu sterben. Damit liegt hier also die dritte Bedeutung von wahrscheinlich bzw. Wahrscheinlichkeit vor, die Ausdruck einer Prognose ist – hier in Form von Extrapolation.

9.) Nennen Sie noch einmal die Unterschiede, die zwischen den drei Bedeutungen von Wahrscheinlichkeit bestehen und die im Unterkapitel D.5 „Zufall und Wahrscheinlichkeit im Alltag“ aufgeführt sind.

a) Für die Wahrscheinlichkeit bei Zufallsexperimenten gilt das Gesetz der großen Zahl. Für sie lässt sich ein genauer Wert berechnen, der keinen Schwankungen unterliegt.
b) Der Wahrscheinlichkeitsbegriff im Alltag hingegen drückt eine persönliche Einschätzung, eine Vermutung oder eine Offenkundigkeit aus. Für ihn lässt sich kein Zahlenwert angeben.
c) Für die dritte Art von Wahrscheinlichkeit lässt sich zwar ein Zahlenwert angeben. Dieser ist aber nicht eine Folge des Gesetzes der großen Zahl, sondern das Ergebnis von statistischem Material, das fast immer auf Stickproben beruht, die ein Abbild der

Grundgesamtheit eben nur bedingt abgeben.

D.12 Literatur

- [1] www.didaktikmat2chem.de/Heisenbergs Unschaerferelation_Bedeutung und Veranschaulichung.pdf
- [2] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 6. Auflage. Bd. 3, Wiesbaden (Vieweg u. Teubner | Springer Fachmedien) 2011, S. 264 ff.
- [3] https://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsvariable (Dezember 2011)
- [4] Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 606 ff.
- [5] www.didaktikmat2chem.de/Das_Differential - einmal_konsequent anschaulich_gedacht.pdf , dort das Unterkapitel: „Der Grenzzustand in der Integralrechnung“.
- [6] Daniel Grandt: BARMER-Mitgliederzeitschrift, Heft 02, 2019, S. 11.
- [7] Wie Literaturstelle [4], nur auf S. 692/693,
- [8] Wie Literaturstelle [4], nur auf S. 600.
- [9] Wie Literaturstelle [2], nur auf S. 317.
- [10] Wie Literaturstelle [4], nur auf S. 657.
- [11] https://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsvariable (Dezember 2011).
- [12] Wie Literaturstelle [4], nur auf S. 657ff.
- [13] Wie Literaturstelle [2], nur auf S. 269.
- [14] Gordon M. Barrow: Physikalische Chemie. 4. Auflage. Teil I, Heidelberg, Wien (Bohmann), Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn) 1980, S. 75.
- [15] Dieter Meschede: Gerthsen Physik. Berlin, Heidelberg, (Springer) 2010, S. 701.
- [16] Yára Detert, Christa Söhl: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ahnungslose. 2. Auflage. Stuttgart (Hirzel Verlag), 2017.