Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung - einfach erklärt

Bernhard Blank

Veröffentlicht unter: www.didaktikmat2chem.de [1]

Artikel D

Fassung 4.1

[1] Titel der Website: Erklärungen in Mathematik, Physik und Physikalischer Chemie

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung – einfach erklärt

Eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, u.a. in Zufallsexperimente, Gesetze der Wahrscheinlichkeit und den Erwartungswert.

Dieser Artikel gibt einen ersten Einblick in die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei werden folgende Fragen behandelt:
Was es mit den zwei Gegenspielern **Zufall** und **kausales Denken** auf sich hat und was man unter dem mathematischen Zufall versteht.
Was ein **Zufallsexperiment** ist und welche relevanten Begriffe es hierzu gibt.
Wie man die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** berechnet und wovon das **empirische Gesetz der großen Zahl** handelt. Einige leichte Gesetzmäßigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden dazu zusammengestellt.
Warum der Alltagsbegriff vom **Zufall** sich vom **mathematischen Zufall** unterscheidet.

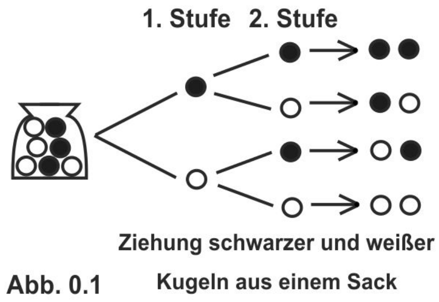

Abb. 0.1

Worum es bei mehrstufigen Zufallsexperimenten geht; zur Darstellungsweise über ein Baumdiagramm siehe dazu Abb. 0.1. Außerdem werden die Größen **Zufallsvariable**, **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung** erläutert.

Verwendete Begriffe und Namen: Ausfall, Demokrit, Ereignis, Ereignisraum, Erwartungswert, absolute und relative Häufigkeit, Realisation, Standardabweichung, Varianz, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Zufall, Zufallsexperiment, Zufallsgröße, Zufallsvariable.

Inhalt

D.1 Überblick

Begonnen wird mit einer kleinen Gegenüberstellung von kausal und zufällig bedingten Sachverhalten in der Welt, an die sich einige charakterisierende Gedanken über den Zufall und seinem Auftreten anknüpfen. Hierzu wird darauf eingegangen, welche Bedeutung der Zufall für die Naturwissenschaften hat (siehe Unterkapitel D.2). Die mathematische Behandlung des Zufalls führt uns zu Zufallsexperimenten und den damit verbundenen Begrifflichkeiten (s. D.3). Absolute und relative Häufigkeiten in Zufallsexperimenten ermöglichen direkt den **zentralen Begriff der Wahrscheinlichkeit**, der hier mit ein paar einfachen Formeln und einem Rechenbeispiel untermauert wird (s. D.4). Die Fragestellung, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, 2 Sechsen in einem Würfelspiel hintereinander zu würfeln oder aus einem Sack eine schwarze und eine weiße Kugel nacheinander zu ziehen, ist das Thema der **mehrstufigen** bzw. gekoppelten **Zufallsexperimente**, s. dazu auch Abb. 0.1 (dies alles unter D.5). In D.6 wird auf den etwas unverständlichen Begriff der Zufallsvariablen eingegangen und sein Sinn herausgestellt. Und wie man für die grafischen Verteilungen von Zufallsexperimenten die Begriffe **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung** charakterisiert, wird in D.7 und D.8 erläutert.

D.2 Zufall und Notwendigkeit

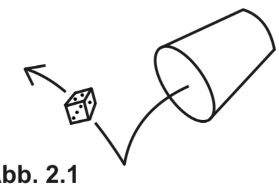

Abb. 2.1

Seit dem griechischen Altertum ist es üblich, die Geschehnisse in der materiellen Welt in zufällig und gesetzlich bedingte Sachverhalte einzuteilen. So formulierte schon der griechische Philosoph Demokrit (* um 460 v. Chr.): „Alles, was im Weltall existiert, ist die Frucht von Zufall und Notwendigkeit.“ [1] Gerade in den Naturwissenschaften hat sich diese demokritsche Auffassung bewährt, und sie ist so zu einem festen Bestandteil in ihr geworden. Mit **Notwendigkeit** ist dabei alles gemeint, hinter dem eine

[1] Es soll hier aber nicht die immaterielle Welt geleugnet werden, für deren Existenz nach Ansicht des Autors die Werte jeder Kultur und verschiedene Glaubens- und Sinninhalte sprechen.

Gesetzmäßigkeit steht. Zu diesen Gesetzmäßigkeiten können aber nicht nur solche wie das **Gesetz** der Schwerkraft oder das der Bewegung in der Physik gezählt werden[1], sondern auch beim Zufall – genauer gesagt: bei Zufallsexperimenten – gibt es Gesetzmäßigkeiten, von denen jede Wahrscheinlichkeitsrechnung lebt und worauf später noch einzugehen ist.

Unter dem **Zufall** versteht man allgemein, was uns immer wieder bei den bekannten Schulbeispielen vom Werfen eines Würfels (s. Abb. 2.1) oder einer Münze begegnet: Offenbar gibt es Momente im Leben und in der Natur, die nicht vorhersagbar sind, und die Erkenntnis, dass es solche Sachverhalte gibt, wird durch den Begriff des Zufalls ausgedrückt. Steht denn auch sprachlich der Zufall für das, was einem „zufällt". So kann einerseits ein platzender Autoreifen bei hoher Geschwindigkeit aufgrund eines Materialfehlers immer wieder schlimme Folgen haben, ebenso ein Erdbeben, das sich nicht vorhersagen lässt. Andererseits ist die Entstehung des Lebens mit vielen Zufällen verbunden, wie jedermann vom Biologieunterricht her weiß, um so ein positives Beispiel für den Zufall zu nennen.
Das Bestreben Materialfehler gering zu halten, ist gerade ein Anliegen in der Technik, ebenso wie bei Seebeben entsprechende Frühwarnsysteme bereitzustellen, wenn man auf den Umgang des Menschen mit dem Zufall eingehen will. Technische Vorkehrungen sowie Konstruktionen haben vielfach den **Zweck**, den Auswirkungen des Zufalls entgegenzuwirken. Weiter könnte man den Bau eines Hauses aufführen, um bei Wetterunbilden geschützt zu sein (s. Abb. 2.2), oder den Einbau von Stoßdämpfern gegen die Schlaglöcher beim Autofahren – alles als ganz praktischer Schutz vor zufälligen Einwirkungen.

Abb. 2.2

Bisweilen findet man die Einteilung, dass die Geschehnisse auf der Welt in zufällig und **kausal** (vom *lat.* causa = Ursache, Grund) bedingte Sachverhalte aufzuteilen seien. Wenn man bedenkt, dass ein Würfel neben den zufällig erzeugten Augenzahlen bei seinem Fall außerdem dem Gesetz der Schwerkraft gehorcht, so ist die Schwerkraft der **Grund** oder die **Ursache** dafür, dass diese Bewegung stattfinden kann. Betrachte ich also den gesetzlichen Aspekt eines Vorgangs, so kann ich für ihn meistens eine Ursache ausmachen, die ihn in Gang setzt oder aufrechterhält. Insofern stehen die Bezeichnungsweisen kausal und gesetzlich bedingter Sachverhalt oft für ein- und dasselbe. (Siehe dazu aber Aufgabe 2).)

Was ist nun der Zufall im eigentlichen Sinn? Denn mancher tut sich mit diesem Begriff etwas schwer, und es erfordert sicher auch ein gewisses Maß an Abstraktion, wollte man mit ihm umgehen können. Schließlich gibt es ja immer wieder die Ansicht, dass es so etwas wie den Zufall gar nicht gibt! Dies ist deswegen immer wieder Gegenstand philosophischer Erörterungen. Dem steht aber entgegen, auch solche Vorgänge begreifen zu wollen, wie die beim Werfen eines Würfels. Vor allem in den **Naturwissenschaften** hat sich dieser Begriff durchgesetzt, weil man mit ihm vieles sehr einfach und tragfähig erklären kann. So ist im Mikrokosmos das Moment des Zufalls gar nicht mehr wegzudenken und es hat sich dort als äußerst fruchtbar erwiesen. Man denke nur an die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen und die Theorie, die sich dahinter verbirgt, die sog. Quantenmechanik.
Der Zufall als solcher ist stets als **wertfrei** anzusehen, was man nicht verkennen sollte und wie es dem Denken in den Natur- und in den Ingenieurwissenschaften entspricht.

Der eine oder andere mag vielleicht einwenden, dass selbst bei einem Würfelwurf man sich vorstellen kann, dass dieser auf ganz feinen Bahnen über die Ecken des Würfels abläuft und dass es von diesen Bahnen so viele gibt, dass ein Wurf jedes Mal anders ausfällt. Schaut man aber genauer hin, so hat gerade die moderne Naturwissenschaft über Experimente feststellen können, dass es so feine Bahnen auf mikrophysikalischer Ebene gar nicht gibt und der Bahnbegriff im

[1] für die Chemie sei das Massenwirkungsgesetz genannt und für die Biologie die Mendelschen Regeln

Mikrokosmos auch obsolet geworden ist.[1] Vielmehr kann man nur mit einer gewissen Unschärfe sagen, wo sich eine mögliche Bahn, wenn man diese Ausdrucksweise einmal gebrauchen will, befindet. So ist dieses Argument mit den ganz feinen Bahnen nicht als Ultima Ratio für die Würfelecken tauglich.

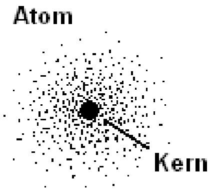

Abb. 2.3

Weiterhin ist es eine Eigenschaft des Zufalls, dass er sich nicht austricksen lässt. (Siehe dazu auch Aufgabe 8).) Gerade bei Glücksspielen wird das Gegenteil immer wieder behauptet, wenngleich unter dem Vorwand, hinter die Gesetzmäßigkeiten von Zufallsexperimenten zu kommen, die es zweifelsohne gibt.
Mathematisch ist nur der Zufall von Belang, der unter gleichen Bedingungen immer wieder auftritt, und nur der ist in den Naturwissenschaften von Bedeutung. Mit anderen Worten: Ein Zufall, der nur einmal auftritt, kann mathematisch gar nicht behandelt werden. (Insofern ist nicht alles, was einem „zufallen" kann, ein Zufall im mathematischen Sinne. Doch dazu später mehr.)
Ein „Maß" für den mathematischen Zufall stellt, wie weiter unten noch erläutert wird, die Wahrscheinlichkeit dar, mit Werten zwischen 0 und 1. Diese hat keine anschauliche Bedeutung und tritt vornehmlich als reine Rechengröße auf. Allerdings kann man über die Verteilung von Wahrscheinlichkeiten, dieser einen anschaulichen Charakter verleihen. Siehe dazu die Abb. 2.3, in der die Wahrscheinlichkeiten, ein Elektron um einen Atomkern anzutreffen, dargestellt werden: Je dichter die Punkteanzahl pro Volumenelement ist, desto wahrscheinlicher ist es dort, ein Elektron zu finden.

D.3 Begriffe zu Zufallsexperimenten

Wiederholt man einen Vorgang, in denen der Zufall ausschließlich auftritt, unter gleichen Bedingungen immer wieder (die Betonung liegt hier auf gleich!), so nennt man dies ein **Zufallsexperiment** oder einen **Zufallsversuch**. Für Praktikanten ist dabei Folgendes zu beachten: Jeder, der einmal an einem physikalischen Praktikum teilgenommen hat, wird bei den dort durchgeführten Experimenten neben zufälligen Fehlern auch systematische Fehler finden, die die Messergebnisse verfälschen bzw. in einer bestimmten Richtung ausfallen lassen. Solche Experimente stellen somit keine reinen Zufallsexperimente dar.
Im Alltag gibt es eine ganze Reihe von Situationen, deren Auftreten als ein Zufallsexperiment gedeutet werden kann. Das bekannteste hierbei ist das oben erwähnte Werfen eines Würfels oder einer Münze. Ganz gleich, wie der Würfel oder die Münze geworfen wird, erhält man jeweils nicht vorhersehbare Ergebnisse für die Augenzahl oder die Münzseite. Aber auch die Kartenspiele, bei denen immer wieder gemischt und neu verteilt wird, stellen Zufallsexperimente dar. Weiterhin gehören das bekannte Lotto- und Roulette-Spiel eindeutig in die Kategorie der Zufallsexperimente.

Ein Zufallsexperiment selbst begreift man stets aus einer Abfolge von **Ausfällen**. Ein Ausfall ist in den oben genannten Beispielen der Wurf eines Würfels, das Ziehen einer Karte in einem Kartenspiel oder einer einzelnen Lotto-Zahl. Finden mehrere Ausfälle unter exakt gleichen Bedingungen hintereinander statt, wie z.B. der Wurf eines Würfels, ergeben sie erst das Zufallsexperiment als Ganzes. Beim Ziehen einer Karte – oder einer Lotto-Zahl - müsste zur Einhaltung der gleichen Bedingungen die Karte bzw. die Lotto-Kugel immer wieder zurückgelegt werden.

Als nächsten wichtigen Begriff spricht man bei einem Zufallsexperiment von **Ausgängen**, die es

[1] Siehe dazu auch den Artikel „Heisenbergsche Unschärferelation – ihre Bedeutung" unter www.didaktikmat2chem.de/Heisenbergsche_Unschaerferelation_Bedeutung.pdf , der ein Experiment zum Bahnbegriff im Mikrokosmos angibt, bei dem man einmal explizit die Probe aufs Exempel gemacht hat.

bei einem Ausfall hat. So kann beim Würfelspielen ein Wurf z.B. den Ausgang 3 oder den Ausgang 6 als Ergebnis haben oder beim Kartenspiel die gezogene Karte die Ausgänge Herz, Karo, Pik oder Kreuz.
Ebenso wie man danach fragen kann, wie oft eine 3 gewürfelt wird, ist die Fragestellung erlaubt, wie oft eine Augenzahl mit geradem Wert, also eine 2, 4 oder 6 auftritt. Man spricht dann nicht mehr von Ausgängen, sondern von einem **Ereignis**. Ein Ereignis besteht also aus einem oder mehreren Ausgangsmöglichkeiten. Bei einem Wurf mit 2 Würfeln könnte man so fragen, wie häufig das Ereignis eintritt, bei dem die Summe beider Augenzahlen 7 ergibt.
Der Begriff des Ereignisses ist somit umfassender als der Begriff des Ausgangs.
Ist nach einem Ereignis gefragt, bei dem es genau nur einen Ausgang gibt, so nennt man dies mathematisch ein **Elementarereignis**. Das Auftreten des Ausgangs 3, wie oben erwähnt, ist also ein solches Elementarereignis. So weit also zu den einfachen Begrifflichkeiten bei Zufallsexperimenten.

Im Folgenden soll in diesem Artikel immer wieder auf bestimmte Zufallsexperimente zurückgegriffen werden. Diese sind im Einzelnen:
a) der Wurf eines Würfels
b) der Wurf zweier Würfel, wobei nach dem Ereignis gefragt wird, dass die Summe der Augenzahlen 7 ergibt
c) der Wurf einer Münze
d) das Ziehen von Karten aus einem Kartenstapel, wobei nur auf die Kartenart Herz, Karo, Pik und Kreuz Wert gelegt wird (die Abbilder Bube, Dame, König, Ass sowie die Werte 2 bis 10 sollen keine Rolle spielen)
e) das Ziehen 2er Kugeln aus einem Sack mit 3 schwarzen und 4 weißen Kugeln, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht wieder in den Sack zurückgelegt werden muss

Weitere, auf diesen Zufallsexperimenten aufbauende Beispiele können mit den hier erworbenen Kenntnissen in den Aufgaben am Schluss dieses Artikels berechnet werden.

Mathematisch werden einem Ereignis Formelbuchstaben wie $A, B, C, ..., E$ bzw. E_i verliehen. Wird nur nach den Elementarereignissen beim Wurf eines Würfels gefragt, so ist z.B. mit $i = 1,...,6$: $E_1 = \{1\},..., E_6 = \{6\}$ (die Angaben in den geschweiften Klammern stehen für die jeweiligen Ausgänge).
Da bei einem Würfelwurf stets mehr Ereignisse als Elementarereignisse auftreten können - so sind Ereignisse für gerade und ungerade Augenzahlen möglich -, kann man für die Ereignisse gerade (E_g) bzw. ungerade (E_{ug}) schreiben: $E_g = \{2,4,6\}$ bzw. $E_{ug} = \{1,3,5\}$.
Neben den Formelbuchstaben $A, B, C, ..., E$ bzw. E_i für ein Ereignis, treten für ein Elementarereignis noch die Schreibweisen ω_i bzw. ω auf [1], sodass in der Literatur mehrere Formelbuchstaben anzutreffen sind. Bei einem Würfelwurf käme man so auf die Elementarereignisse $\omega_1,...,\omega_6$ [2]. (Siehe dazu Aufgabe 6a), die für einen Münzwurf eine andere mögliche Zuordnung von Elementarereignissen demonstriert.)

[1] Siehe Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 6. Auflage. Bd. 3, Wiesbaden (Vieweg u. Teubner | Springer Fachmedien) 2011, S. 264 ff.

[2] Anstelle der Schreibweise ω_i bzw. ω für ein Elementarereignis findet man in Wikipedia (siehe: http://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsvariable (Dezember 2011) für diese Buchstaben eine andere Deutungsweise. So kann man den Wurf eines Würfels s e l b s t als ein Ereignis auffassen, der dann alle Elementarereignisse umfasst. Bezeichnet man infolgedessen das „Ereignis“ eines ersten Würfelwurfes als ω_1 und das eines zweiten als ω_2, so entsteht das Ereignis zweier Würfe als $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, das für die Elementarereignisse zweier Würfe steht. Diese Schreibweise wird in diesem Artikel nicht weiter verfolgt.

An den Schreibweisen $E_1 = \{1\}$ oder $E_g = \{2,4,6\}$ wird deutlich, dass bei Zufallsexperimenten oft eine **Mengenschreibweise** vorzufinden ist. An diese Schreibweise wird sich jeder gewöhnen müssen, der sich näher mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst. Dies begründet sich damit, dass es nicht nur Mengen von Zahlen und Gegenständen gibt, sondern man sich auch Mengen von Ausgängen oder - allgemein - **Mengen von Ereignissen** denken kann. Der Mengenbegriff wird hier also universeller aufgefasst.

In diese Mengenschreibweise fallen nun folgende Begriffe:

a) Betrachtet man die Elementarereignisse, also beim Würfelspiel die Ereignisse E_1 bis E_6 mit $E_1 = \{1\},..., E_6 = \{6\}$, so nennt man die Menge aller möglichen Elementarereignisse bzw. Ausgänge des Zufallsexperiments die **Ergebnismenge Ω.** In der ω-Schreibweise wäre so für den Würfelwurf, die Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ zu formulieren. Man schreibt dafür beim Würfelwurf auch: $\Omega = \{1,2,...,6\}$ [1]

Für Ω ist der Name **Ergebnisraum** gebräuchlich, wenn man Ω bildlich darstellen will. Siehe dazu Abb. 5.1 für das Ergebnis 2er Würfe.

b) Würde man weiter bei einem Zufallsexperiment die Menge aller nur denkbaren Ereignisse auflisten, die i.Allg. stets größer als die Menge aller Elementarereignisse ist, so gelangt man zu dem Begriff des **Ereignisraumes** $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dieser stellt eine Potenzmenge von Ω dar**.** Ein solcher Ereignisraum enthielte bei dem Wurf eines Würfels neben den Elementarereignissen E_1 bis E_6, die obigen Ereignisse E_g und E_{ug} und noch viele Weitere (insgesamt enthält die Potenzmenge von Ω 2^n Elemente, wenn n die Anzahl der Elementarereignisse ist. Siehe hierzu Aufgabe 6c), bei der die Potenzmenge für ein Beispiel aufgelistet wird).

Nun zu etwas anderem:

Um im Folgenden unsere Zufallsexperimente klassifizieren zu können, soll mit Begriffen wie **Merkmal (qualitatives wie quantitatives und diskretes und stetiges quantitative Merkmal)**, **Merkmalsträger**, **Merkmalsausprägung** und **Merkmalswert** gearbeitet werden:[2]

Zufallsexperimente besitzen demnach immer einen **Merkmalsträger** und ein **Merkmal**. Das Merkmal selbst kann bestimmte **Merkmalsausprägungen** annehmen, für die weiterhin, wenn man es mit Zahlen zu tun hat, der Begriff **Merkmalswert** (der Formelbuchstabe ist x_i oder x) benutzt wird.

Dazu ein paar Beispiele zur Erläuterung: So ist beim Werfen eines Würfels der Würfel der Merkmalsträger, das Merkmal die Augenzahl und die Merkmalsausprägungen oder Merkmalswerte, die die Augenzahlen aufweisen können, die Zahlen 1 bis 6, also $x_1 = 1,..., x_6 = 6$.

Merkmalsausprägungen, die keine Merkmalswerte – also Zahlenwerte wie beim Würfel - bilden, sind bei den Beispielen Münze und Kartenspiel gegeben: Merkmalsträger sind hier die Münze oder das Kartenspiel, das Merkmal die Münzseite oder die Kartenart. Die Merkmalsausprägungen sind die Münzseiten Wappen oder Zahlenbild oder die Arten Herz, Karo, Pik und Kreuz. -

Weiterhin spricht man bei einem Merkmalsträger bzgl. seines Merkmals von **qualitativen** und **quantitativen Merkmalen**.

Ein qualitatives Merkmal besteht, wenn als Zufallsergebnis kein Zahlenwert vorliegt. Das ist beim Merkmalsträger Münze der Fall (es soll hier nur das Zahlenbild als solches betrachtet werden). Aber auch beim Merkmalsträger Kartenspiel liegt ein qualitatives Merkmal vor, wenn man wieder an Herz, Karo, Pik und Kreuz denkt. Quantitative Merkmale bedingen dagegen einen Zahlenwert, das ist der **Merkmalswert**. Dieser kann seinerseits **diskret** oder **stetig** sein. So besitzt das Beispiel mit dem Würfel und dem quantitativen Merkmal Augenzahl hier die diskreten Merkmalswerte 1 bis 6. Diskret eben deshalb, weil es zwischen den Merkmalswerten, z.B. $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, keine

---

[1] Siehe aber S. 15 unten

[2] Diese Klassifizierung erfolgt nach Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 606 ff.

weiteren Zahlen gibt.
Im Gegensatz dazu kann bei stetigen Merkmalswerten, auf die erst pro forma eingegangen wird und die mit x bezeichnet werden sollen, die Zahl x jeden beliebigen Wert in einem bestimmten Intervall annehmen.
Es sei darauf hingewiesen, dass sich jedes qualitative Merkmal durch die Zuordnung von Zahlenwerten theoretisch in ein diskretes quantitatives Merkmal überführen lässt.
Dem Merkmalswert, den ein quantitatives Merkmal annehmen kann, gibt man auch den Namen **Realisation**. So liegen beim Würfelwurf also die Realisationen $x_1 = 1$ bis $x_6 = 6$ vor.

D.4 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Die Ausfälle eines Zufallsexperiments lassen sich natürlich grafisch darstellen. Wir gelangen so zu den **Verteilungen von Zufallsexperimenten**. Dazu werden zunächst nur die Elementarereignisse eines Experiments herangezogen.
Abb. 4.1a zeigt diese exemplarisch für den Wurf eines Würfels. Sie demonstriert, wie die Häufigkeit $h_a(\omega_i)$ der einzelnen Elementarereignisse E_i bzw. ω_i angetroffen werden könnte (die Anzahl der Würfe bzw. Ausfälle m sei in diesem Fall 200). $h_a(\omega_1)$ steht für die Häufigkeit des Elementarereignisses ω_1 mit dem Merkmalswert $x_1 = 1$, $h_a(\omega_2)$ für die des Elementarereignisses ω_2 mit dem Merkmalswert $x_2 = 2$ usw.
$h_a(\omega_i)$ gibt man den Namen **absolute Häufigkeit,** da sie eine absolute Angabe über die Anzahl der Elementarereignisse macht. (Statt $h_a(\omega_i)$ könnte man auch $h_a(E_i)$ oder $h_a(x_i)$ formulieren.)

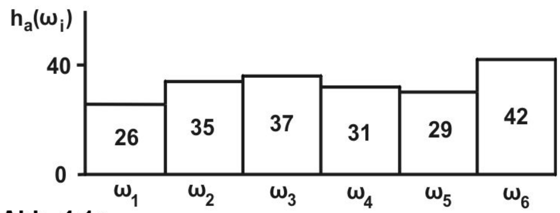

Abb. 4.1a

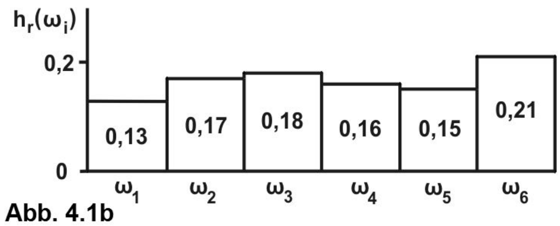

Abb. 4.1b

Da es eigentlich nicht von Belang ist, wie groß die Anzahl m der Ausfälle ist (denn man will sich unabhängig von der Anzahl der ausgeführten Ausfälle machen), geht man häufig zu einer anderen Darstellung über, bei dem die **relative Häufigkeit** $h_r(\omega_i)$ eines Elementarereignisses ω_i ins Spiel kommt. Dabei wird

$$h_r(\omega_i) = \frac{h_a(\omega_i)}{m} \qquad \textit{(D-4.1)}$$

über die einzelnen Elementarereignisse aufgetragen (s. Abb. 4.1b). (Statt $h_r(\omega_i)$ ist ebenfalls wieder $h_r(E_i)$ oder $h_r(x_i)$ möglich.)

Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Summe $\sum_{i=1}^{m} h_r(\omega_i) = 1$ *(D-4.2)*

ist, denn

$$h_r(\omega_1) + h_r(\omega_2) + h_r(\omega_3) + h_r(\omega_4) + h_r(\omega_5) + h_r(\omega_6) = 0{,}13 + 0{,}17 + 0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}21$$
$$= \frac{h_a(\omega_1) + h_a(\omega_2) + h_a(\omega_3) + h_a(\omega_4) + h_a(\omega_5) + h_a(\omega_6)}{m}$$

$$= \frac{26+35+37+31+29+42}{200} = 1$$ (Weitere Elementarereignisse gibt es nicht.)

Führt man ein Zufallsexperiment viele Male durch, wenn es wirklich eines ist, macht man eine erstaunliche Entdeckung: Je größer die Anzahl m der Ausfälle wird, umso mehr streben die einzelnen relativen Häufigkeiten $h_r(\omega_i)$ gegen einen **Grenzwert** - auch als **Grenzzustand**[1] zu verstehen.

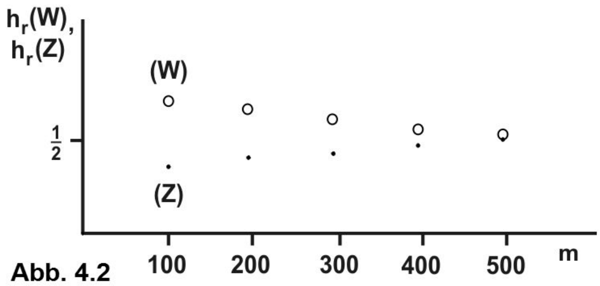

Abb. 4.2

Abb. 4.2 zeigt so einen Verlauf für das Werfen einer Münze, bei der die relativen Häufigkeiten $h_r(W)$ und $h_r(Z)$ gegen m aufgetragen sind. (W steht für Wappen und Z für Zahlenbild.) Der Grenzwert beträgt hier $h_r(W)_\infty = h_r(Z)_\infty = \frac{1}{2}$

Geht man im Vergleich dazu auf das Zufallsexperiment mit dem des Würfels über, so würde man finden:

$h_r(\omega_1)_\infty = ... = h_r(\omega_6)_\infty = \frac{1}{6}$.

Das Symbol ∞ deutet dabei an, dass die Anzahl der Ausfälle unendlich groß ist. Da man diese Beobachtung bei jedem Zufallsexperiment macht, wurde sie als das **empirische Gesetz der großen Zahl**[2] bezeichnet. Man gibt hierbei dem Grenzwert - bzw. Grenzzustand - jedes Elementarereignisses ω_i den Namen **Wahrscheinlichkeit** P (vom engl. *probability*).

Dieser Sachverhalt lässt sich auf alle **Ereignisse** eines Experiments übertragen, also auch, wenn man Ereignisse betrachtet, für die mehrere Ausgänge gleichzeitig infrage kommen, die somit keine Elementarereignisse mehr sind. Das wird gleich unten an einem Rechenbeispiel noch deutlich werden.

Auf dem Rechnen mit solchen Grenzwerten/Grenzzuständen oder Wahrscheinlichkeiten, wie man jetzt sagen muss, beruht eine ganze Disziplin in der Mathematik, das ist eben die **Wahrscheinlichkeitsrechnung**. Man hat es dort immer mit Zufallsexperimenten zu tun, bei denen die Anzahl der Ausfälle theoretisch unendlich groß ist.

Da man dies in der Praxis nicht erreichen kann, sagt man, dass die Anzahl der Ausfälle bei einem Experiment groß sein muss, um so einigermaßen der theoretischen Forderung nach Unendlichkeit gerecht zu werden.

Man schreibt für $h_r(W)_\infty$ und $h_r(Z)_\infty$ für das Werfen einer Münze die Bezeichnungen $P(W)$ und $P(Z)$, also $P(W) = h_r(W)_\infty$ und $P(Z) = h_r(Z)_\infty$, und weiter für das Werfen eines Würfels – dort liegen die Elementarereignisse E_1 bis E_6 vor -: $P(E_1) = h_r(\omega_1)_\infty, ..., P(E_6) = h_r(\omega_6)_\infty$.

Die **Formelbezeichnung** $P(E_i)$ für ein Elementarereignis oder Ereignis ist die übliche Bezeichnung in der Literatur, die andere $h_r(\omega_i)_\infty$ hat nur der Autor hier so gewählt.

Nun zu dem angekündigten **Rechenbeispiel**:

Will man beim Werfen eines Würfels danach fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, ein bestimmtes Ereignis E_i anzutreffen, so wird dies allgemein über die Formel

$$P(E_i) = \frac{k}{n} \qquad \textit{(D-4.3)}$$

berechnet. k ist die Anzahl der möglichen Ausgänge, die einem Ereignis E_i zugeordnet werden,

[1] Zum Begriff des Grenzzustandes siehe das Unterkapitel „Der Grenzzustand in der Integralrechnung“ im Artikel www.didaktikmat2chem.de/Das_Differential - einmal_anders_gedacht.pdf

[2] nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1655–1705)

und n die Anzahl der Ausgänge des Zufallsexperiments überhaupt. Dabei wird in dieser Formel vorausgesetzt, dass jeder Ausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.
Wird einmal danach gefragt, wie groß beim Würfeln die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ ist, ein Ereignis E_1 mit der Augenzahl 1 zu erhalten ($E_1=\{1\}$), so ist: $P(E_1)=\frac{1}{6}$ (mit $k=1$ und $n=6$).
Für $P(E_2)$ mit dem Ereignis $E_2=E_g$, für das nur die geraden Augenzahlen 2, 4 oder 6 auftreten ($E_2=\{2,4,6\}$), wäre zudem: $P(E_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ($k=3$ und $n=6$).
Und fragt man, wie die Wahrscheinlichkeit $P(E_3)$ eines Ereignisses E_3 mit der Augenzahl 3 o d e r 5 ($E_3=\{3,5\}$) ist, so errechnet sich $P(E_3)$ zu $P(E_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ($k=2$ und $n=6$).
Folgendes lässt sich an diesem Rechenbeispiel feststellen:
a) Betrachtet man nur die Ausgänge unseres Würfelexperiments, so ist $\sum_{i=1}^{6} P(\omega_i)=6\cdot\frac{1}{6}=1$. Diese Beziehung folgt in gewisser Weise aus Beziehung *(D-4.2)*, nur dass man es hier mit den zugehörigen Grenzwerten bzw. Grenzzuständen $P(\omega_1)$ bis $P(\omega_6)$ zu tun hat und nicht mehr mit den relativen Häufigkeiten. Formuliert man dies allgemein für die Elementarereignisse eines beliebigen Zufallsexperiments, so ist $P(\Omega)=1$, was selbstverständlich ist, hält man sich die Definition von Ω vor Augen. Man trägt dieser Aussage in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch in Form eines eigenen Axioms Rechnung: $P(\Omega)$ ist hierbei die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses[1], die 1 beträgt. (Eigentlich eine Trivialität.)
b) Schließen die Ereignisse E_1, $E_2=E_g$ und E_3 einander aus und gibt es keine weiteren Ereignisse, so ist immer $\sum_{i=1}^{l} P(E_i)=1$. *(D-4.4)*
(l ist die Anzahl dieser betrachteten Ereignisse des Experiments, in unserem Fall 3.) Das ist verständlich, denn schließt man nach $\sum_{i=1}^{6} P(\omega_i)=6\cdot\frac{1}{6}=1$ (s.o.) auch Ereignisse ein, die keine Elementarereignisse sind und die sich gegenseitig ausschließen und sind somit alle Ausgänge eines Zufallsexperiments erfasst, so folgt daraus Beziehung *(D-4.4)*. In unserem Würfelspiel ist deswegen: $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1$.

Abb. 4.3 und Tabelle 4.1 stellen die Ergebnisse dieses Experiments grafisch dar. Man erkennt in der Mengenschreibweise leicht, das $P(E_1\cup E_2\cup E_3)=$ $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=1$, wenn $E_1\cap E_2=\{\}$, $E_2\cap E_3=\{\}$ und $E_1\cap E_3=\{\}$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit der sich ausschließenden Ereignisse eines Zufallsexperiments ist also in einem Fall wie diesem immer 1. Einzelne denkbare Ereignisse, die nicht auftreten, haben dann aus logischen Gründen die Wahrscheinlichkeit „0“.

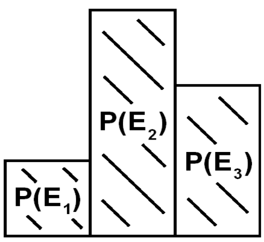

Abb. 4.3

	Würfelzahl	Wert
P (E_1)	1	1/6
P (E_2)	2, 4 oder 6	1/2
P (E_3)	3 oder 5	1/3
P (E_1) + P (E_2) + P (E_3)		1

Tabelle 4.1

---
[1] Ein **sicheres Ereignis** ist ein Ereignis, das mit Sicherheit auftritt. So tritt beim Wurf eines Würfels eine der Augenzahlen von 1 bis 6 mit Sicherheit immer auf. Hingegen spricht man von einem **unmöglichen Ereignis**, wenn dieses nie vorkommt. So können bei dem Wurf mit einem Würfel die Augenzahlen 1 und 2 nie gleichzeitig gewürfelt werden.

Aus der Definition der relativen Häufigkeiten mit $h_r(\omega_i) = \frac{h_a(\omega_i)}{m}$ (s. *(D-4.1)*) ergibt sich, dass die **relative Häufigkeit** eines Ereignisses oder Elementarereignisses immer **nur Werte zwischen 0 und 1** besitzt. Gleiches gilt für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(E_i)$ bzw. $P(E)$, die ja nur Grenzwerte bzw. Grenzzustände der relativen Häufigkeiten darstellen. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeiten als „Maß" für den Zufall in einem Zufallsexperiment Werte zwischen 0 und 1 erreichen können. Das erklärt das etwas Eigentümliche dieser Rechengröße, die sich so in jeder anschaulichen Darstellung widerspiegelt. Diese Aussage ist in seiner Selbstverständlichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls der Inhalt eines eigenen Axioms.

Man gibt Abb. 4.3, die hier nur ein sehr einfaches Beispiel ist, den Namen **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, weil sie eine Verteilung aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments ausgibt, gleichfalls unter der Bedingung, dass sie einander ausschließen. Da sie quasi eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit diskreten Merkmalswerten ist, wird sie auch **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** genannt.

Die Formeln bzw. Ausdrücke dieses Unterkapitels seien nunmehr zusammengestellt:

- $h_a(\omega_i)$ (bzw. $h_a(E_i)$ oder $h_a(x_i)$) steht für die **absolute Häufigkeit**
- $h_r(\omega_i) = \frac{h_a(\omega_i)}{m}$ ist die Definition der **relativen Häufigkeit**; m = Anzahl der Ausfälle (es ist ebenfalls die Verwendung von $h_r(E_i)$ bzw. $h_r(x_i)$ denkbar)
- $\sum_{i=1}^{m} h_r(\omega_i) = 1$, $\sum_{i=1}^{m} P(\omega_i) = 1$
- $P(E_i)$ ist die **Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis E_i
- $P\left(E_i\right) = \frac{k}{n}$, wenn jeder Ausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt. k = Anzahl der möglichen Ausgänge des Ereignisses E_i; n = Anzahl aller Ausgänge des Zufallsexperiments überhaupt.
- $\sum_{i=1}^{m} P\left(E_i\right) = 1$, wobei alle Ereignisse E_i einander ausschließen und zu allen Ausgängen ein Elementarereignis oder Ereignis existiert; alle übrigen denkbaren Ereignisse sind dann „0".
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)$, wenn die Ereignisse E_i sich paarweise einander ausschließen, also $E_i \cap E_j = \{\}$ für alle $i, j \in \{1,...,m\}$ mit $i \neq j$.[1]
- $P(\Omega) = 1$ ist offensichtlich, denn die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist immer 1.

Nach all den neu hinzugekommenen Begrifflichkeiten, die Sie sich vergegenwärtigen sollten, ist hier vielleicht eine Pause angebracht, bevor Sie fortfahren. Mit diesen paar Formeln haben sie schon einen Einblick in einige wesentliche Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewonnen.

[1] Diese Aussage bildet das dritte Axiom in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zusammen mit den beiden obigen Axiomen wurden sie von Kolmogorow (sowjet. Mathematiker, 1903-1087) aufgestellt. Diese bilden das Grundgerüst der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man nennt sie auch schlicht die Axiome der Wahrscheinlichkeit.

D.5 Zufall und Wahrscheinlichkeit im Alltag

Nicht immer hat der Zufall etwas mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit zu tun, jedenfalls nicht mit dem Zufall, den wir als den oben definierten mathematischen Zufall auffassen.
Ein Beispiel möge dies verdeutlichen: Frau Müller kommt aufgeregt nach Hause und überfällt ihren ahnungslosen Lebenspartner mit der Aussage: „Stell dir vor, wen ich heute in der Stadt getroffen habe? Meine alte Schulfreundin Astrid! - Die habe ich seit ewigen Zeiten ja nicht mehr gesehen. Was für ein Zufall!"
Nehmen wir diese Art von Zufall genauer unter die Lupe, so können wir sicher sagen, dass es ein unvorhersehbares Ereignis und somit ein zumindest subjektiv empfundener Zufall ist. Im Gegensatz zum oben definierten mathematischen Zufall, wie er z.B. beim Würfelspiel auftritt, lässt er sich aber nicht reproduzieren. So können wir auch kein Zufallsexperiment aufstellen, bei dem unter stets gleichen Bedingungen dieser Zufall des Öfteren auftreten kann. Denn wie wollte man unter exakt gleichen Bedingungen (wie eben beim Würfelspiel möglich) solch einen Zufall immer und immer wieder untersuchen? Wie müssten sogar derartige Bedingungen lauten, damit so ein Zufall wieder hervortreten kann (welche Uhrzeit, welcher Bus wurde genommen, hat vielleicht ein Feiertag vorher oder das Wetter ein Rolle gespielt, befand sich Frau Müller gerade in einer besonderen Stimmung, sodass sie gerade deshalb in die Stadt fuhr)? Kurzum, es ist einfach unmöglich. Und da man auch nicht stets gleiche Versuchsbedingungen formulieren kann, lässt sich auch nicht das Gesetz der großen Zahl anwenden und somit eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen.
Man könnte freilich argumentieren, dass auch jeder alltägliche Zufall im Prinzip nur eine Kopplung lauter einfacher mathematischer Zufälle ist, nur dass diese Kopplung so komplex ist, dass wir sie nicht berechnen können. Aber ob Stimmungen, persönliche Entscheidungen und Verfassung, Einflussnahme von anderen etc., die alle hier mit hineingespielt haben mögen, unter die Rubrik von Zufallsexperimenten zu subsummieren sind, das ist eher fraglich und hat mit der wissenschaftlichen Untersuchung des Zufalls und deren Begriffsbildungen nichts zu tun.

Und da ich gerade den Begriff der Wahrscheinlichkeit angeschnitten habe, soll noch auf zwei unterschiedliche Inhalte des Wortes wahrscheinlich aufmerksam gemacht werden. Nehmen wir z.B. die Aussagen: „Wahrscheinlich wird er heute Abend noch vorbeikommen"; oder „Das kennst du wahrscheinlich schon". – Hier steht der Begriff wahrscheinlich für **eine persönliche Einschätzung**, dem kein Zahlenwert (wie bei einem Zufallsexperiment) zugeordnet werden kann. Diese Form von „wahrscheinlich" kann man ebenso gut durch Ausdrücke wie „sicherlich" oder „mit Sicherheit" ersetzen. In gleicher Weise verhält es sich mit der substantivierten Form in der Aussage: „Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass er sein Amt behalten wird." Auch wenn dies eine scheinbar objektive Aussage ist, so handelt es sich hier doch immer noch um eine persönliche Einschätzung, die darin mit – vielleicht auch objektiven – Kriterien verknüpft wird. – Auch die Ausdrucksweise: „Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% wird er/sie das getan haben", ist höherer Blödsinn, selbst wenn sie in manchen intellektuellen Kreisen vorzufinden ist. Es handelt sich hier immer noch um eine persönliche Einschätzung, und dabei kann sich jemand auch irren. Deshalb ist es in einem solchen Fall Unsinn, diese mit einer Zahlenangabe verknüpfen zu wollen, um damit vielleicht eine Wissenschaftlichkeit vortäuschen zu wollen, die nicht gegeben ist.
Der im Unterkapitel D.4 eingeführte Begriff der Wahrscheinlichkeit fußt hingegen immer auf Zufallsexperimenten, für die subjektiv begründete Aussagen wie eine persönliche Einschätzung nicht in Betracht kommen. Möglicherweise ist die erstere Verwendung des Wortes wahrscheinlich bzw. Wahrscheinlichkeit historisch älter[1] und wurde dann für den Wahrscheinlichkeitsbegriff entlehnt, den wir seither von der strengen Form der Wahrscheinlichkeitsrechnung her kennen. Für letzteren lässt sich dabei ein Zahlenwert angeben (zwischen 0 und 1), für ersteren nicht.

---

[1] So leitet es sich nach dem Duden, Herkunftswörterbuch, von verus (= *lat.* wahr) und similis (= *lat.* ähnlich) her.

D.6 Mehrstufige Zufallsexperimente

Nun wieder zurück zu unserer mathematischen Behandlung des Zufalls:
Die hier erwähnten Zufallsexperimente können nicht nur einzeln auftreten, sondern sie können auch gekoppelt sein. So ist die Fragestellung erlaubt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einem Würfelwurf 2 Sechsen hintereinander zu würfeln.
Man nennt ein solches Experiment ein **mehrstufiges Zufallsexperiment**, in diesem Fall eines mit 2 Stufen. Der erste Wurf bildet die Stufe Nr. 1 und der zweite Wurf die Stufe Nr. 2. Ebenso kann man fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, 3, 4 oder mehr Sechsen hintereinander zu würfeln. Man hätte es dann mit einem 3-, 4- oder noch höherstufigen Experiment zu tun. Beim 2-stufigen Zufallsexperiment ist die Fragestellung gleichwertig, ob man 2 Sechsen hintereinander würfelt oder mit 2 Würfeln 2 Sechsen gleichzeitig (warum?).

Die Berechnung eines 2-stufigen Zufallsexperiments ist nicht weiter schwierig: Beträgt die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln $P(E_6)=\frac{1}{6}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, davon noch einmal eine Sechs zu erhalten, $\frac{1}{6}$ dieser Größe, also $P(E_6E_6)=\frac{\frac{1}{6}}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(E_6)\cdot P(E_6)=\frac{1}{36}$.
Man sieht, dass zur Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit diese durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten der jeweiligen Stufen errechnet wird. Dies ist eine weitere Gesetzmäßigkeit beim Zufall, wie sie am Anfang dieses Artikels bereits angedeutet wurde und wie sie neben dem empirischen Gesetz der großen Zahl existiert.

Man kann diesen Zusammenhang verallgemeinert über

$$P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s})=P(E_{i_1})\cdot P(E_{i_2})\cdot...\cdot P(E_{i_s})=\prod_{j=1}^{s}P(E_{i_j}) \qquad \textit{(D-5.1)}$$

ausdrücken. Dabei ist $i_1,i_2,...,i_s\le n$, wobei s ist die Anzahl der Stufen dieses Experiments ist, n die Anzahl der Elementarereignisse bzw. Ausgänge einer Stufe und E_{i_j} das Ereignis einer Stufe.
Fragt man mit dieser Formel z.B. danach, wie oft in einem 2-stufigen Würfelspiel zuerst eine 3 und dann eine 4 gewürfelt wird, so ist $s=2$, $i_1=3$, $i_2=4$, $P(E_3)=\frac{1}{6}$, $P(E_4)=\frac{1}{6}$ und damit

$$P(E_3E_4)=P(E_3)\cdot P(E_4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Für den speziellen Fall des 2-stufigen Würfelexperiments lässt sich anschaulich der **Ergebnisraum** Ω angeben. Dieser stellt sich mit $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$ *(D-5.2)* wie in Abb. 5.1 dar. Die fettgedruckten Zahlen sollen darin das Ereignis darstellen, bei dem die Summe der Augenzahlen den Wert 7 ergibt.

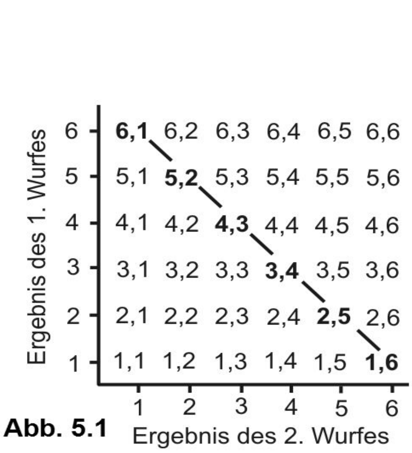

Abb. 5.1

Ein recht interessantes Beispiel für ein mehrstufiges Zufallsexperiment liegt vor, wenn man einen Sack mit 3 schwarzen und 4 weißen Kugeln besitzt und danach fragen will, mit welcher Wahrscheinlichkeit 2 schwarze, 2 weiße oder 1 schwarze und 1 weiße Kugel hintereinander aus dem Sack gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Herausnehmen nicht wieder in den Sack zurückgelegt wird. Auch so etwas kann man mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnen.

Da zweimal gezogen wird, liegt ein 2-stufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen SS, $SW = WS$ und WW (S = schwarz, W = weiß) vor.
Veranschaulichen lässt sich ein solches Experiment durch ein sog. **Baumdiagramm.** Es sieht in diesem Fall wie folgt aus: s. dazu die Abb. 5.2.

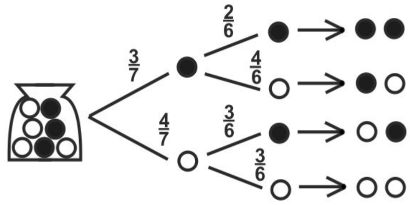

Abb. 5.2

Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel beim ersten Mal zu ziehen, beträgt, da ja 3 schwarze Kugeln vorliegen, $3 \cdot P(S) = 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$. Soll dann wieder eine schwarze Kugel gezogen werden, so stehen – bei insgesamt jetzt 6 Kugeln im Sack – nur noch 2 schwarze zur Verfügung, sodass sich die Wahrscheinlichkeit zu $2 \cdot P(S) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ ergibt. Man tut demnach bei der zweiten Ziehung so, als wenn von Vorneherein die erste Ziehung gar nicht existiert hätte, man also einen Sack von 2 schwarzen und 4 weißen Kugeln vorliegen hat und berechnet dafür die Wahrscheinlichkeit. Entsprechend lassen sich die anderen Brüche erhalten, was man sich im Einzelnen in Abb. 5.2 klarmache. Für die Wahrscheinlichkeiten der Kombinationen SS, SW bzw. WS und WW geht man dann von den einzelnen Teilwahrscheinlichkeiten entlang eines **Pfades** aus, der zur gewünschten Kombination führt, und multipliziert diese miteinander (ganz analog dem Zufallsexperiment mit den 2 Würfeln). Es ergibt sich somit:

$$P(SS) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7},\; P(WW) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \text{ und } P(SW) + P(WS) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7},$$

wobei wieder $P(SS) + P(WW) + P(SW) + P(WS) = 1$ ist (es liegen keine weiteren Fälle vor). Dies entspricht genau dem Fall mit der Formel *(D-4.4)* aus dem Unterkapitel D.4.

Möchte man für ein mehrstufiges Zufallsexperiment deren Wahrscheinlichkeiten berechnen, so ist zur Veranschaulichung das Aufstellen eines Baumdiagramms immer angebracht, wenn man sich alle einzelnen Fälle dort vergegenwärtigen will. Auf diese Weise gewinnt man schnell einen Überblick darüber, welche Wahrscheinlichkeiten auftreten können.

Man sieht, dass bei Zufallsexperimenten regelrechte **Gesetzmäßigkeiten** auftreten, die bei einfachen (einstufigen) Experimenten die Form von *(D-4.3)* haben und bei mehrstufigen die Form von *(D-5.1)* annehmen.
Bei Letzteren stößt man auf die sog. **Pfadregeln**:
Hierbei ergibt sich der Ausfall eines mehrstufigen Zufallsexperiments – im Beispiel mit den Kugeln z.B. $P(SS)$ - durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten längs des betreffenden Pfades. (Dies wird als **Produktregel** bezeichnet.)
Ein bestimmtes Ereignis kann man aber auch durch Addition der Wahrscheinlichkeiten von Ausfällen berechnen, die zu diesem Ereignis gehören. Im Beispiel sei dafür das Ereignis $E_{versch.}$ gewählt, bei dem die <u>verschiedenen</u> Farben Schwarz und Weiß gezogen werden ($E_{versch.} = E(SW) + E(WS)$). Da hier die zwei Elementarereignisse SW und WS vorliegen, sind diese zu addieren, um zu $E_{versch.}$ zu gelangen (Dieser Sachverhalt, bei dem mehrere Elementarereignisse zusammengeführt werden, ist unter dem Namen **Summenregel** bekannt).
Ein ausführliches Beispiel für die Produkt- und Summenregel findet sich in Aufgabe 5).

Bei all diesen mehrstufigen Zufallsexperimenten gilt stets der Grundsatz, dass sie eigentlich nur gelten, wenn die Anzahl der Ausfälle unendlich hoch ist oder – in der Praxis – man eine sehr hohe Anzahl von ihnen für eine Auswertung zur Verfügung hat. So tritt die Wahrscheinlichkeit $P(SS)$ für den Sack mit den Kugeln genau genommen nur auf, wenn unendlich oft 2 Kugeln hintereinander aus einem vollen (!) Sack gezogen werden. Dies muss man sich immer vor Augen halten! (Das gleiche gilt natürlich für $P(WW)$ und $P(SW) + P(WS)$).

Mehrstufige Zufallsexperimente können manchmal recht komplex sein. Es ist gerade das Anliegen der **Wahrscheinlichkeitsrechnung**, hierfür die entsprechenden Formeln (wie die Produkt- und die Summenregel) aufzustellen. Diese Formeln können manchmal noch viel umfänglicher sein, als die hier aufgeführten. Für denjenigen, der sich hier schon besser auskennt, seien die Stichworte „bedingte Wahrscheinlichkeit" und „Satz von Bayes" genannt.
Manchmal, wie beim Lotto-Spiel, muss man zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zusätzlich noch die Regeln der Kombinatorik anwenden, was jetzt aber zu weit führt.[1]

Die Pfadregeln und Formeln dieses Unterkapitels sind im Überblick:

- **Produktregel:** Die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls eines mehrstufigen Zufallsexperiments $P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s})$ ergibt sich durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten $P(E_{i_j})$ längs des betreffenden Pfades. Also $P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_s}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdot ... \cdot P(E_{i_s}) = \prod_{j=1}^{s} P(E_{i_j})$, wobei $i_1, i_2, ..., i_s \leq n$ und s die Anzahl der Stufen des Zufallsexperiments, n die Anzahl der Elementarereignisse bzw. Ausgänge einer Stufe und E_{i_j} das Ereignis einer Stufe ist.

- **Summenregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das sich aus mehreren Ausfällen eines mehrstufigen Zufallsexperiments zusammensetzt, ergibt sich durch Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Ausfälle.

D.7 Die Zufallsvariable

Genauso wie eine Variable verschiedene Werte einer Menge annehmen kann (z.B. Werte aus der Menge der reellen Zahlen), kann sie so definiert werden, dass sie als Platzhalter für die Merkmalswerte eines Zufallsexperiments steht. Man gibt dieser Variablen, die stellvertretend für alle Merkmalswerte oder einen Teil von ihnen verwendet wird, einen besonderen Namen und nennt sie **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße**.
Bei unserem oben angeführten Würfelspiel, könnte eine Zufallsvariable also die Werte x_1 bis x_6, wobei hier $x_1 = 1, ..., x_6 = 6$ ist, annehmen. Bezeichnet wird so eine Variable mit den großen Formelbuchstaben X, Y oder Z.
Die- oder derjenige, dem diese Erklärung vielleicht sehr einsichtig erscheinen mag, wird in der Literatur unter dem Begriff der Zufallsvariablen aber etwas anderes finden:
So wird eine Zufallsvariable **als eine Funktion** X definiert, die jedem Elementarereignis ω_i aus der Ergebnismenge Ω genau eine reelle Zahl $X(\omega_i)$ zuordnet. Bei einem Würfelwurf wird dem Elementarereignis ω_1 so die Augenzahl $x_1 = 1$ zugeordnet (es ist $x_1 = X(\omega_1)$), ω_2 der Wert $x_2 = 2$ (es ist $x_2 = X(\omega_2)$) usw.
Man bezeichnet hier die Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ausgang oder Elementarereignis eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl zuordnet, dann als Z u f a l l s v a r i a b l e . So weit die Definition in der Literatur[2,3].
Folgende Gedanken dazu sind m.E. berechtigt:
Dass ein Würfelwurf 6 verschiedene Elementarereignisse aufweist und dass diese die Werte $x_1 = 1$ bis

[1] Wen die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto interessiert, siehe Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 600.
[2] Siehe Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 6. Auflage. Bd. 3, Wiesbaden (Vieweg u. Teubner | Springer Fachmedien) 2011, S. 317.
[3] Siehe wieder Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 657.

$x_6 = 6$ ergeben, mag die Abbildung $X:\Omega \to \mathbb{R}$ rechtfertigen, die speziell für den zufälligen Charakter der Zuordnung steht. Gewöhnlich wird somit zwischen ω_i als Elementarereignis in Ω und dem Wert, den dieses zufällig in $\mathbb{R}$ annehmen kann, unterschieden.
Allerdings ist eine Begriffsbildung, mit der eine Variable gleichzeitig auch als Funktion (bzw. allgemeiner als Abbildung) bezeichnet wird, sicher nicht sehr schön, hat man doch aus der Schule gelernt, dass eine Variable für einen Platzhalter und eine Funktion für eine besondere Form einer Relation steht – dies also ein Paar völlig verschiedener Schuhe ist. In diesem Zusammenhang wird argumentiert, dass man es bei Zufallsvariablen nur mit „Funktionen zu tun hat, die nicht mit Variablen im üblichen Sinne gleichgesetzt werden dürfen.“ [1] - Was bei diesem Begriff wohl gemeint ist - wenn man diese *Doppelfunktion* entflechten will -, ist der Umstand, dass das Ergebnis einer Abbildung, welches hier reelle Zahlen sind, in einer Variablen aufgenommen werden soll und dass man dieser den besonderen Namen Zufallsvariablen gibt. Die- oder derjenige, der damit in der Praxis umgeht, wird dann aber doch feststellen, dass Zufallsvariablen immer wie reine Variablen eingesetzt werden. (Das wird in den folgenden Ausführungen in diesem Artikel noch deutlich.[2]) Insofern bleibe ich in diesem Artikel bei der eingangs zu diesem Unterkapitel gemachten Erklärung!

Folgende Differenzierung wird für Zufallsvariablen im Weiteren vorgenommen: Steht eine Zufallsvariable für ein Zufallsexperiment mit diskreten Merkmalswerten, so nennt man sie **diskrete Zufallsvariable**, und steht sie für stetige Merkmalswerte, nennt man sie **stetige Zufallsvariable**. Zufallsvariablen schreibt man also groß, wenn sie als Platzhalter für die einzelnen möglichen Merkmalswerte oder, wie man ebenfalls sagt, Realisationen stehen. Die Merkmalswerte s e l b s t schreibt man hingegen klein. So stünde $x_1, x_2, ..., x_6$ für die Merkmalswerte bei einem Würfelexperiment (und somit x_i für diskrete Merkmalswerte) und x für die Merkmalswerte bei Zufallsexperimenten mit einem stetigen Verlauf.
Will man trotzdem auf der Zuordnung $X:\Omega \to \mathbb{R}$ bestehen, ist die Schreibweise wie $x_i = X(\omega_i)$ bzw. $x = X(\omega)$ angebracht. Für den Fall eines Würfels ist dazu $x_i = X(\omega_i)$ wie in Abb. 6.1a dargestellt. Eine Ordnungsrelation, wie $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_6$ entbehrt jedoch der Grundlage und hat hier keinen Sinn. Ebenso könnte man sich jede andere Anordnung wie z.B. die in Abb. 6.1b vorstellen.

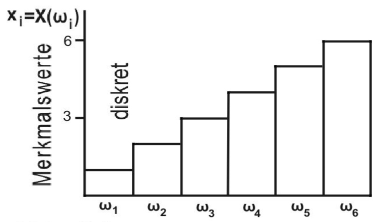

Abb. 6.1a

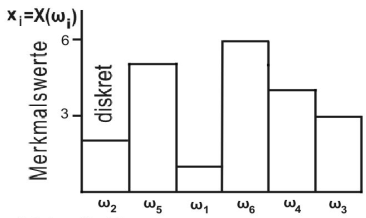

Abb. 6.1b

Für eine stetige Zufallsvariable dagegen kann die Funktion $x = X(\omega)$ wie in Abb. 6.2a dargestellt werden. Auch hier entbehrt eine Ordnungsrelation, wie sie durch $\omega_i < \omega_j < \omega_k$ denkbar wäre, jeglicher Grundlage. Eine zur diskreten Zufallsvariablen analoge Darstellung wie in Abb. 6.1b würde dann für einige ω-Werte z.B. die Form von Abb. 6.2b annehmen. (Alle ω-Werte lassen sich jedoch zeichnerisch nicht darstellen, da von ihnen unendlich viele existieren.)

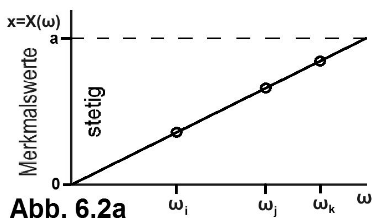

Abb. 6.2a

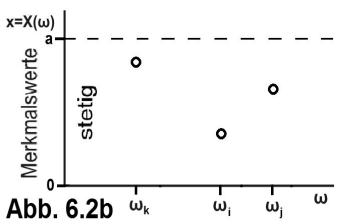

Abb. 6.2b

Man beachte, dass in Abb. 6.2b im Intervall $\left[0, a\right]$ auf der Ordinaten jeder Merkmalswert x vertreten ist und deshalb $x = X(\omega)$ als **stetig** zu bezeichnen ist, wenn auch keine Ordnungsrelation für ω existiert.
Der aufmerksame Leser wird vielleicht bemerkt haben, dass für die Menge Ω nach $X:\Omega \to \mathbb{R}$ Elemente der Form $\omega_1, \omega_2, ...$ im diskreten Fall bzw. ω im stetigen Fall auftreten und für $\mathbb{R}$ hingegen die reellen Zahlen. Deshalb wird für einen Würfelwurf die Schreibweise

[1] Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Zufallsvariable (Dezember 2011).
[2] Siehe Robert Müller-Fonfara: Mathematik verständlich. München (Bassermann) 2005, S. 657ff.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ (s.o.) verwendet. Andererseits findet man für Ω weiter oben in diesem Artikel auch die Schreibweise $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, also mit Elementen in Form von reellen Zahlen (s. *(D-5.2)*). Hier gehen die Schreibweisen z.T. durcheinander. (So wird bei L. Papula[1] beides nebeneinander benutzt.) - Korrekt ist es i n j e d e m F a l l , wenn für Ω nur Elemente der Form ω_i bzw. ω aufgeführt werden, also für den Würfel $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, und für $\mathbb{R}$ nur reelle Zahlen wie z.B. $x_i = X(\omega_i)$ bzw. $x = X(\omega)$ (s. die Abb. 6.1 und 6.2).
Mit Zufallsvariablen kann man wie mit normalen Variablen rechnen. Folgende zwei Anwendungen seien dazu genannt:
a) Bei einem Würfelwurf mit 2 Würfeln seien alle Würfe gesucht, bei denen die Summe der Augenzahlen 7 ergibt. Ist X die Zufallsvariable für den ersten Würfel und Y die für den zweiten, kann man statt $x_i + y_j = 7 \wedge i, j \in \{1, ..., 6\}$ kürzer schreiben: $X + Y = 7$. (Als Lösung käme die Menge $\mathbb{L}$ aller 2-tupel infrage mit $\mathbb{L} = \{(x_i, y_j) \mid X = x_i, Y = y_j \wedge X + Y = 7\}$.) Oftmals, wie z.B. bei $X + Y = 11$, erspart man sich mit dieser Schreibweise Überlegungen, welche Werte die Indizes i und j für x_i und y_j annehmen.
b) Eine weitere Schreibweise für Zufallsvariablen findet man bei der Formulierung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis auftritt. Meint man bei einem Würfelwurf mit nur einem Würfel die Wahrscheinlichkeit, eine 3 zu würfeln, so schreibt man statt $P(E_3)$ mit $E_3 = \{3\}$ nun $P(X = x_3)$ mit $x_3 = 3$. Dabei ist $P(E_3) = P(X = x_3) = \frac{1}{6}$ (X steht in diesem Fall für ein Platzhalter mit nur einem Wert).

D.8 Der Erwartungswert

Eine sinnvolle Verwendung des Begriffs der Zufallsvariablen ergibt sich im Zusammenhang mit dem Begriff des Erwartungswertes. Dieser ist eine wichtige Größe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und vor allem in der physikalischen Teildisziplin der Quantenmechanik spielt er **eine zentrale Rolle**. Um zu einer Vorstellung darüber zu gelangen, was man unter einem Erwartungswert versteht, diene nun das folgende Beispiel zur Motivation:
Wer seine monatlichen Ausgaben, über die Jahre verteilt, ausrechnen möchte, tut sicher nicht gut daran, wenn er die einzelnen Ausgabeposten nimmt und einfach daraus den Mittelwert bildet, um zu einer Abschätzung über den Wert der Ausgaben, der ihn von Monat zu Monat erwartet, zu gelangen. So wird er bei einer Berechnung den Kauf eines Autos, der bei ihm alle 10 Jahre mit 15000 € ansteht, und den Kauf eines Computers mit 600 € alle 5 Jahre niedriger einstufen müssen als z.B. die Lebensmittelausgaben, die bei ihm Monat für Monat mit 150 € zu Buche schlagen. Denn er kann nicht einfach hergehen und den Mittelwert $\overline{x}$ aus all seinen Zahlen bilden, die dann für jeden Monat stehen sollen. Kurzum, er muss die relative Häufigkeit aller Ausgaben in einem Zeitraum, der hier 10 Jahre betragen soll, berücksichtigen. Daraus erhält er seinen monatlichen Wert.
Möchte er diesen, der mit $y_{Erw.}$ bezeichnet werden soll, ausrechnen, so kann er das mit folgender Formel tun:

$$y_{Erw.} = x_1 \cdot h_r(x_1) + x_2 \cdot h_r(x_2) + ... + x_n \cdot h_r(x_n) \qquad \textit{(D-7.1)}$$

Im Einzelnen ist dabei:

$y_{Erw.}$: zu erwartende monatliche Ausgaben

x_i : Höhe eines Ausgabepostens

[1] Siehe Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 6. Auflage. Bd. 3, Wiesbaden (Vieweg u. Teubner | Springer Fachmedien) 2011, S. 269.

$h_r(x_i)$: relative Häufigkeit, mit der x_i in einem bestimmten Zeitraum (hier 10 Jahre) vorkommt

und da $h_r(x_i) = \frac{h_a(x_i)}{m}$, ist

$h_a(x_i)$: absolute Häufigkeit, mit der x_i in – hier - 10 Jahren vorkommt, d.h. wie oft ein Posten auftritt

m : Anzahl aller Ausgaben in $12 \cdot 10$ Monaten ($\hat{=}$ 10 Jahren)

Für das obige Beispiel ist:

$x_1 = 15000€$, $h_a(x_1) = 1$ (das Auto kauft er nur einmal in 10 Jahren);

$x_2 = 600€$, $h_a(x_2) = 2$ (der Computer wird 2-mal in 10 Jahren gekauft);

$x_3 = 150€$, $h_a(x_3) = 12 \cdot 10$ (die Mietausgaben fallen für ihn Monat für Monat an, also ($12 \cdot 10$)-mal in 10 Jahren).

$$m = h_a(x_1) + h_a(x_2) + h_a(x_3) + m_{weitere} = 1 + 2 + 12 \cdot 10 + m_{weitere} \qquad \textit{(D-7.2)}$$

$$\Rightarrow y_{Erw.} = x_1 \cdot h_r(x_1) + x_2 \cdot h_r(x_2) + x_3 \cdot h_r(x_3) + ... = x_1 \cdot \frac{h_a(x_1)}{m} + x_2 \cdot \frac{h_a(x_2)}{m} + x_3 \cdot \frac{h_a(x_3)}{m} + ... \qquad \textit{(D-7.3)}$$

$$= \frac{1}{m}\{x_1 \cdot h_a(x_1) + x_2 \cdot h_a(x_2) + x_3 \cdot h_a(x_3) + ...\} \qquad \textit{(D-7.4)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + 12 \cdot 10 + m_{weitere}}\left(15000€ \cdot 1 + 600€ \cdot 2 + 150€ \cdot 12 \cdot 10 + ...\right) \qquad \textit{(D-7.5)}$$

Wäre $m_{weitere} = 0$, gäbe es also keine weiteren Ausgabeposten, so ergibt sich $y_{Erw.}$ zu 278 €. Er muss demnach im Schnitt 278 € pro Monat ausgeben, um sich Miete, Auto und Computer in 10 Jahren leisten zu können. Das wäre der Wert, der ihn monatlich erwartet, bzw. **sein Erwartungs-wert** .

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der ja Zufallsexperimente zugrunde liegen, kann man ebenfalls einen solchen Wert errechnen. Nur mittelt man dort nicht über die Höhe der Ausgabeposten, die man mit der notwendigen Einstufung (s. $h_r(x_i)$ in obiger Formel) versieht, sondern über die Merkmalswerte x_i, die man mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens multipliziert.
Hat man in obigem Beispiel noch durch die Anzahl aller Ausgaben (dort in 10 Jahren) dividiert, muss man dies bei einem Zufallsexperiment bei einer insgesamt endlichen Anzahl von Ausfällen durch die Anzahl aller Ausfälle tun.
Man gelangt so, ganz analog zu Beziehung *(D-7.1)*, zum Erwartungswert

$$E(X) = x_1 \cdot h_r(x_1) + x_2 \cdot h_r(x_2) + ... + x_n \cdot h_r(x_n) \qquad \textit{(D-7.6)}$$

Hierbei hat man n verschiedene Merkmalswerte vorliegen und $h_r(x_i) = \frac{h_a(x_i)}{m}$ bezieht sich auf die relativen Häufigkeiten der Merkmalswerte x_i. $h_a(x_i)$ ist die absolute Häufigkeit, mit der ein Merkmalswert x_i auftritt und m die Anzahl der Ausfälle des Zufallsexperiments.
Geht man von einem Zufallsexperiment mit m Ausfällen zu einem mit einer unendlich großen Anzahl von Ausfällen über, so ist $h_r(x_i)$ weiter durch $P(X = x_i)$ zu ersetzen. Man gelangt so schließlich zur allgemeinen Formel eines **Erwartungswertes für Zufallsexperimente**:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) \qquad \textit{(D-7.7)}$$

Es ist zu betonen, dass sich diese Formel nur auf Zufallsexperimente mit diskreten Merkmalswerten bezieht.
Betrachtet man die Zufallsvariablen in dieser Formel, so steht auf der rechten Seite die Zufallsvariable $X = x_i$ in dem Ausdruck $P(X = x_i)$ als Platzhalter für eine Zufallsvariable mit jeweils nur einem Wert (nämlich x_i). Auf der linken Seite hingegen steht im Ausdruck $E(X)$ die Zufallsvariable als Platzhalter für alle möglichen Werte $x_1,...,x_n$. Soweit sei also die Einsatzmöglichkeit der Zufallsvariablen bzw. -größe genannt, auf die weiter oben schon hingewiesen wurde.

Als **Beispiel** für den Erwartungswert eines Zufallsexperiments sei folgender Fall betrachtet:
Es läge der Wurf eines Würfels vor, der sich aber nicht ideal verhalten soll (z.B. weil sein Schwerpunkt nicht im Zentrum liegt). Bei ihm sei $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{9}$ und $P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = \frac{2}{9}$. Es würde sich dann $E(X)$ gemäß *(D-7.7)* zu

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{2}{9} + 5\cdot\frac{2}{9} + 6\cdot\frac{2}{9} = 4 \qquad (D\text{-}7.8)$$

berechnen. Der **Mittelwert** $\bar{x}$ aller Merkmalwerte x_i für diesen Würfel ergäbe sich jedoch zu

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5\,. \qquad (D\text{-}7.9)$$

Man sieht hier gut, dass Erwartungswert und Mittelwert durchaus nicht dasselbe sind. Dies verhält sich gleich unserem Beispiel, bei dem man die monatlichen Ausgaben auch nicht über die Höhe aller Ausgabenposten allein mitteln konnte. Nur bei einem idealen Würfel wären Erwartungswert und Mittelwert, bedingt durch die gleichen Wahrscheinlichkeiten, identisch. (Es ist dort

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{6} = \bar{x} = 3,5\,.) \qquad (D\text{-}7.10)$$

Allgemein gilt deswegen, dass man den **Erwartungswert** als den Wert erhält, den man **für alle Ausfälle eines Zufallsexperiments** (eigentlich über unendlich viele) **erwartet** (s. dazu Abb. 7.1 für das Beispiel des nichtidealen Würfels: Die Größe der Flächen oberhalb der gestrichelten Linie ist gleich der Größe der fehlenden Flächen unterhalb der gestrichelten Linie).

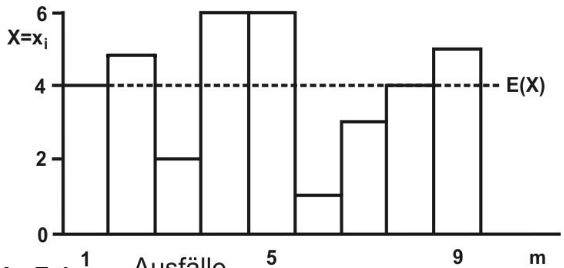

Abb. 7.1

Eine Mittelung über die **möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments** dagegen, zeigt Abb. 7.2. Sie stellt eine Mittelung über alle Ausgänge eines Zufallsexperiments dar, die dann den Mittelwert $\bar{x}$ ergibt,

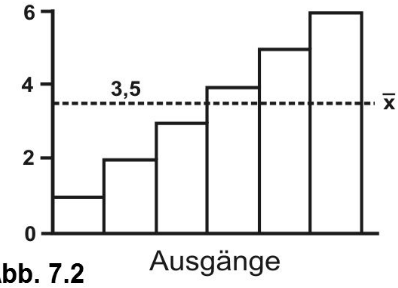

Abb. 7.2

und ist deutlich vom Erwartungswert zu unterscheiden.[1]

Die beiden wesentlichen Formeln aus diesem Unterkapitel sind somit:

- Die Formel für die Berechnung des Erwartungswertes in einem Zufallsexperiment mit diskreten Merkmalsausprägungen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

- Die Formel für die Berechnung eines Mittelwertes $\overline{x}$: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

D.9 Varianz und Standardabweichung

Möchte man einen Anhaltspunkt dafür haben, wie stark die Ergebnisse eines Zufallsexperiments um einen bestimmten Erwartungswert streuen, so liefert der Begriff der Varianz und der der Standardabweichung hier ein gutes Kriterium. So zeigen die Abb. 8.1a und 8.1b zwei Zufallsexperimente, die zwar beide den gleichen Erwartungswert besitzen, jedoch im Mittel verschieden um diesen herum liegen. Dabei sind die Abweichungen von Abb. 8.1a etwas niedriger als die von Abb. 8.1b. (Man vergleiche dazu einmal genau die Flächen oberhalb und unterhalb der gestrichelten Linie.)

Um, mathematisch gesehen, diesen Sachverhalt ausdrücken zu können, führt man den Begriff der Varianz und - als Wurzel aus dieser - den Begriff der Standardabweichung ein.

Man interessiert sich also für die Differenz $|x_i - E(X)|$, oder, wenn man $E(X)$ mit μ bezeichnet, für $|x_i - \mu|$. (Die Betragsangabe muss deswegen stehen, weil bei einer Addition verschiedener Abweichungen sich positive und negative Abweichungen sonst gegeneinander aufheben würden, wie aus Formel *(D-8.2)* ersichtlich ist.)

Somit erhält man für die mittlere Abweichung $\overline{\sigma}$

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \cdot h_r(x_i) \qquad \textit{(D-8.1)}$$

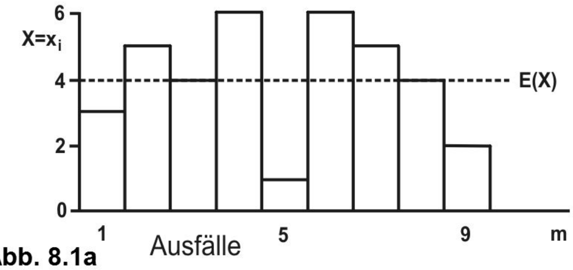

Abb. 8.1a

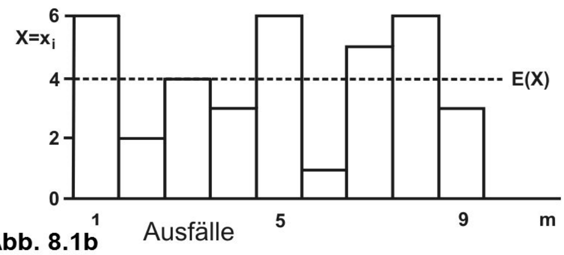

Abb. 8.1b

bei einer endlichen Anzahl von Ausfällen (ganz analog zur Beziehung *(D-7.6)*). Und für unendlich

[1] In der Physik und in der Physikalischen Chemie trifft man unglücklicherweise für $E(X)$ die Schreibweise $\overline{x}$ an. Dieses $\overline{x}$ hat jedoch nichts mit dem Mittelwert $\overline{x}$ wie in *(D-7.9)* zu tun. Man muss also zwischen der **Mittelung über die Ausgänge** und der **Mittelung über die Ausfälle** eines Zufallsexperiments unterscheiden, die manchmal beide mit $\overline{x}$ bezeichnet werden, was etwas verwirrend ist. Siehe a) Gordon M. Barrow: Physikalische Chemie. 4. Auflage. Teil I, Heidelberg, Wien (Bohmann), Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn) 1980, S. 75. Dort $\overline{P}$ im Sinne eines Erwartungswertes und b) Dieter Meschede: Gerthsen Physik. Berlin, Heidelberg, (Springer) 2010, S. 701. Dort $\overline{x}$ ebenfalls im Sinne eines Erwartungswertes.

viele Ausfälle erhielte man dann wiederum [1]

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \cdot P(X = x_i) \qquad \textit{(D-8.2)}$$

(ganz analog zu Beziehung *(D-7.7)*).
Ein Kriterium für die Streuung kann man aber ebenso erhalten, wenn statt der Größe $|x_i - \mu|$ das Quadrat $(x_i - \mu)^2$ betrachtet wird, also man statt der einzelnen Glieder diese ins Quadrat nimmt, wie es in der Literatur üblich ist. Dies ist vielleicht ein wenig praktischer, erst recht in der heutigen Zeit, bei der auf Taschenrechnern die Betragsfunktion nicht immer vorhanden ist.

Dem Wert $V(X)$ mit

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \qquad \textit{(D-8.3)}$$

wird nun der Name **Varianz** gegeben. Qualitativ haben *(D-8.2)* und *(D-8.3)* dieselbe Aussagekraft, quantitativ betrachtet liefern sie aber unterschiedliche Werte.
Die Wurzel aus der Varianz gibt man den Namen **Standardabweichung** und dieser den Formelbuchstaben σ . Es ist also $\sigma = \sqrt{V(X)}$. *(D-8.4)*
Vom Verständnis her ist $|x_i - \mu|$ vielleicht natürlicher, historisch wurde jedoch – wie angeführt - ein anderer Weg beschritten, nämlich den der Varianz mit den Gliedern $(x_i - \mu)^2$, was man sich dann einfach merken muss.

Man beachte, dass bei Ziehung der Wurzel aus $V(X)$ zum Erhalt von σ die Größen $\overline{\sigma}$ und σ <u>durchaus</u> nicht identisch sind. Wen das genauer interessiert, der vergegenwärtige sich dazu das folgende **Rechenbeispiel**:
Hat man einen Würfel, bei dem nur drei Zahlen „würfelbar" sein sollen mit $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 5;$
$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \frac{1}{4}$ und $P(X = x_3) = \frac{2}{4}$, so ist mit $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X = x_i)$:
$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{2}{4} = 3,75 = \mu$. Daraus folgt nach Beziehung *(D-8.2)*:
$\overline{\sigma} = |2 - 3,75| \cdot \frac{1}{4} + |3 - 3,75| \cdot \frac{1}{4} + |5 - 3,75| \cdot \frac{2}{4} = 1,25$
Andererseits ist nach Beziehung *(D-8.3)*:
$V(X) = (2 - 3,75)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3 - 3,75)^2 \cdot \frac{1}{4} + (5 - 3,75)^2 \cdot \frac{2}{4} = 1,687$ und damit $\sigma = \sqrt{V(X)} = 1,30$.
Man sieht, dass $\overline{\sigma}$ und σ nicht dieselben Werte liefern.

> Die aus diesem Unterkapitel wichtigen Formeln sind somit
>
> a) für die Varianz: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ und
>
> b) für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

[1] Diese Definition wird in der Literatur so nicht verwendet und wird hier nur zur Einführung in die Thematik aufgestellt.

D.10 Zusammenfassung

Sofern nicht schon am Ende der einzelnen Unterkapitel aufgeführt, enthält dieser Artikel folgende Aussagen:

- Es gibt zufällig und gesetzlich bzw. kausal bedingte Sachverhalte in der Welt.
- Der Zufall lässt sich nicht austricksen. Er ist in den Natur- und Ingenieurwissenschaften als wertfrei anzusehen.
- Ein Vorgang, der unter stets gleichen Bedingungen wiederholt wird, bei denen ausschließlich der Zufall auftritt, stellt ein Zufallsexperiment dar.
- Die Wahrscheinlichkeit entspricht einem Grenzwert – man könnte auch sagen: einem Grenzzustand - eines Ereignisses in einem Zufallsexperiment. Dieser Sachverhalt wird auch als empirisches Gesetz der großen Zahl bezeichnet. Sie nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, die als „Maß“ für den mathematischen Zufall dienen.
- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es u.a. darum, die Wahrscheinlichkeiten von jeweils unterschiedlich angeordneten Zufallsexperimenten zu berechnen sowie Kenngrößen über die Verteilungen dieser, wie Erwartungswert, Varianz oder Standardabweichung, zu erhalten.
- Da man Mengen von Ereignissen definieren kann, ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch die Mengenschreibweise üblich.
- Nicht alles, was wir im Alltag als Zufall bezeichnen, kann mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage verknüpft werden.
- Die Verwendung des Wortes „wahrscheinlich“ steht im allgemeinen Sprachgebrauch oft für eine persönliche Einschätzung; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie jedoch stets an das Vorhandensein von Zufallsexperimenten gebunden.

D.11 Aufgaben

1.) Auf eine Begriffsunklarheit zu kausal bedingten Sachverhalten sei in diesem Artikel der Vollständigkeit halber noch hingewiesen:
Im Duden ist der Ausdruck Grund-Folge-Beziehung zu finden.[1] Kann eigentlich eine Folge das Ergebnis eines Grundes sein, wie es durch diese Formulierung suggeriert wird? Betrachten Sie dazu die Schreibweise: Aus $a = b \wedge b = c \Rightarrow$ (folgt) $a = c$. *(D-10.1)*

Von Folgerungen und damit folgerichtigem Denken spricht man eher, wenn man sich mit logischen Gedankenketten befasst. Typische Beispiele dafür sind die sog. “Wenn-dann”-Konstruktionen, die man immer wieder im grammatischen Satzbau findet. Auch in der Mathematik sind solche Formulierungen, wie sollte es anders sein, zuhauf vorhanden. (Siehe die obige Schreibweise *(D-10.1)*!) Um folgerichtig zu schließen, benötigt man aber immer bestimmte Bedingungen oder auch Voraussetzungen, aus denen gefolgert wird. Hier von einem “Grund” zu sprechen, ist eigentlich nicht ganz korrekt. Denn ein Grund (oder eine Ursache) hat immer eine Wirkung, wie es in der Physik gesehen wird. Folgerungen gehören dagegen in den Bereich logischen Schließens. Insofern kann auch nicht von einer Grund-Folge-Beziehung gesprochen werden.
Bei den Bedingungen, aus denen etwas folgt, unterscheidet man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. So ist in dem Satz: “Wenn ein Auto 4 Räder besitzt, (dann) hat es auch in der Kurve eine in jeder Hinsicht stabile Lage”, “wenn ein Auto 4 Räder besitzt”

[1] Siehe Duden. 24. Auflage, S. 1180.

eine notwendige Bedingung für die stabile Lage. Eine hinreichende Bedingung ist hingegen: “ Wenn die 4 Räder mit Luft-Reifen ausgestattet sind, (dann) hat es auch in der Kurve eine in jeder Hinsicht stabile Lage.” (Es könnten ja auch Reifen aus Vollgummi sein!)
Und um last but not least auf einen Grund sprechen zu kommen, wäre in dem Satz: “Weil der Fahrer am Lenkrad drehte, fährt das Auto eine Kurve,” der erste Satzteil der Grund dafür, dass das Auto eine Kurve fährt, was dann die beobachtete Wirkung ist.
Soweit zum sprachlichen Gebrauch von “Folgen” und “Gründen”.

2.) Nennen Sie gesetzlich bedingte Sachverhalte in der Mathematik oder in den Naturwissenschaften, für die sich keine Ursache ausmachen lässt. (Gesetze in der Mathematik, die das Ergebnis von Folgerungen sind, z.B. die Potenzgesetze, sind hier ausdrücklich nicht gemeint.)

Genannt seien 3 Beispiele:

a) Für das empirische Gesetz der großen Zahl bei Zufallsexperimenten lässt sich keine Ursache angeben.
b) Das 1. Newtonsche Axiom, nachdem ein Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung verharrt, solange keine äußere Kraft auf ihn einwirkt, bedarf ebenfalls keiner Ursache.
c) Dass sich Licht im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet, lässt sich gleichfalls nicht begründen (jedenfalls noch nicht).

3.) Ein zweistufiges Zufallsexperiment soll mit 2 Würfeln durchgeführt werden. Dabei wird gefragt, wann das Ereignis eintritt, bei dem die Summe der Augenzahlen durch 5 teilbar ist. (Es ist also $X = X_1 + X_2 = 5 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$.) Zeichnen Sie dazu alle entsprechenden Elementarereignisse analog zu Abb. 5.1 auf. Berechnen Sie Anschließend die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

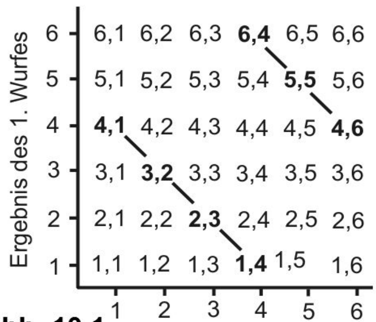

Abb. 10.1

Die fett hervorgehobenen Zahlenpaare (s. Abb. 10.1) stellen die Elementarereignisse dar. Die Wahrscheinlichkeit errechnet sich nach $P(E) = \frac{k}{n}$. Nach Abb. 10.1 ergibt sich: $k = 7$ und $n = 36$, woraus folgt: $P(E) = \frac{7}{36}$

4.) In einem Sack sollen sich eine weiße (W), zwei graue (G) und vier rote (R) Kugeln befinden. Nacheinander sollen 2 Kugeln aus dem Sack gezogen werden. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm, wenn
a) die erste Kugel vor dem zweiten Ziehen wieder in den Sack zurückgelegt und
b) nicht wieder zurückgelegt wird.

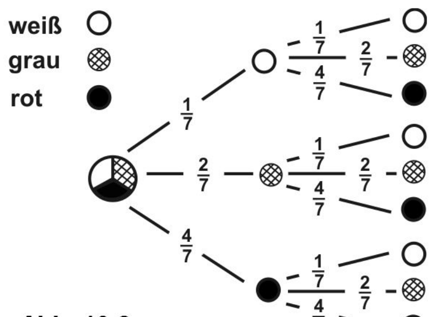

Abb. 10.2

a) Wird die Kugel wieder zurückgelegt, so ist die 2. Stufe (da ja die gleichen Verhältnisse vorliegen) genauso zu behandeln wie die 1. Es ist $P(W) = \frac{k}{n} = \frac{1}{7}$, $P(G) = \frac{2}{7}$ und $P(R) = \frac{4}{7}$. Damit gehen von jedem Knoten einer Stufe 3 Äste aus (s. Abb. 10.2).

b) Wird nicht zurückgelegt, so hat man für die 2. Stufe neue Verhältnisse vorliegen. (Man muss dann im Endeffekt für jede Ziehung so tun, als wenn von Vorneherein der Sack schon so gefüllt war.) Errechnet man z.B. die Wahrscheinlichkeit $P(G)$ für den Pfad WG, so ergibt sich:
$P(G)=\frac{k}{n}=\frac{2}{6}$ (es liegen ja nur 2 graue und 4 rote Kugeln vor). Insgesamt folgt damit Abb. 10.3.

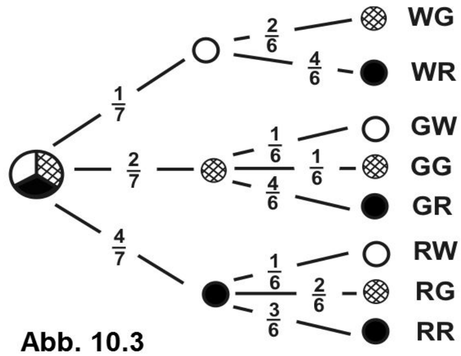

Abb. 10.3

5.) Man berechne anhand des Baumdiagramms in Abb. 10.3 die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Ziehen von 2 Kugeln ohne Zurücklegen mindestens eine graue Kugel zieht.

Es kommen dazu nur die Pfade der Ziehungen WG, GW, GG, GR und RG infrage, da sie mindestens eine graue Kugel aufweisen.
Nach der Produktregel ist:
$P(WG)=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}$; $P(GW)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$; $P(GG)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$; $P(GR)=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}$ und $P(RG)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit für alle diese Fälle beträgt nach der Summenregel:
$P(\text{ mindestens eine graue Kugel })=P(WG)+P(GW)+P(GG)+P(GR)+P(RG)$

$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{4}{21}+\frac{4}{21}=\frac{11}{21}=0{,}52$$

6.) Eine Münze soll 2-mal geworfen werden, wobei die Anzahl der Würfe, bei denen das Wappen auftritt, gezählt wird. Geben Sie
a) die Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments mit den zugehörigen Realisationen an
b) die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen die jeweiligen Elementarereignisse auftreten
c) die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ an, also die Menge der möglichen Ereignisse dieses Experiments überhaupt. Man beachte dabei, dass ein Ereignis mehrere Ausgänge haben kann.

a) Das Wappen kann also 0-, 1- bzw. 2-mal auftreten. Folglich existieren die Elementarereignisse ω_1 mit $x_1=0$, ω_2 mit $x_2=1$ und ω_3 mit $x_3=2$.
b) Will man alle Ausgänge einer 2-mal geworfenen Münze darstellen, so erhält man das 2-stufige Baumdiagramm in Abb. 10.4. Es ergeben sich dabei 4 Ausgänge. Daraus leiten sich die Elementarereignisse mit 0, 1 bzw. 2 Wappen als Realisationen ab:

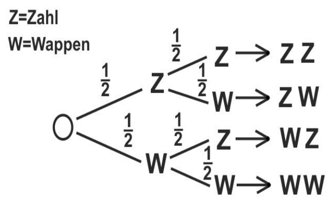

Abb. 10.4

Jeder Ausgang des Diagramms tritt mit der Wahrscheinlichkeit $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (das Experiment ist 2-stufig!) auf. Für ω_1 mit $x_1=0$ gibt es einen Ausgang (ZZ), sodass $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$. Für ω_2 mit $x_2=1$ gelten die Ausgänge WZ und ZW, sodass $P(\omega_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (Summenregel). Für ω_3 mit $x_3=2$ tritt nur ein Ausgang überhaupt auf (d.i. der Ausgang WW), es ist also $P(\omega_3)=\frac{1}{4}$.

Zur Überprüfung erhält man:

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=\dfrac{1+2+1}{4}=1$.

c) Für $\mathfrak{P}(\Omega)$ erhält man 2^n Teilmengen, wobei $n=3$ ist (das ist die Anzahl der Elementarereignisse). Somit ist:

$\mathfrak{P}(\Omega)=\{\varnothing,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_1\vee\omega_3,\omega_1\vee\omega_2,\omega_2\vee\omega_3,\omega_1\vee\omega_2\vee\omega_3\}$ (ergibt zusammen 8 Ereignisse; die leere Menge $\varnothing$ steht für das unmögliche Ereignis, z.B. als $\omega_1\wedge\omega_2$).

7.) Ein nicht-idealer Würfel besäße für die jeweiligen Augenzahlen 1 bis 6 mit den zugehörigen Elementarereignissen $E_1,E_2,...,E_6$ folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(E_1)=\dfrac{1}{18}$, $P(E_2)=P(E_3)=P(E_4)=P(E_5)=\dfrac{1}{6}$ und $P(E_6)=\dfrac{5}{18}$.

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$, der sich für alle Ausfälle dieses Zufallsexperiments im Mittel ergibt.

Es ist $E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i\cdot P(X=x_i)=1\cdot\dfrac{1}{18}+2\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{1}{6}+5\cdot\dfrac{1}{6}+6\cdot\dfrac{5}{18}=\dfrac{73}{18}=4{,}0\overline{5}$

8.) In dieser Aufgabe geht es um den Wunsch, den Zufall austricksen zu wollen.

Die Spieler A und B spielen das Münzwurf-Spiel. Für jeden richtig vorhergesagten Wurf erhält jeder der Spieler 10 Cent, für jeden falsch vorhergesagten Wurf muss er 10 Cent abgeben. Bei diesem Spiel haben die Spieler A und B unterschiedliche Spielstrategien: Denn Spieler A spielt normal und versucht jeden Ausfall vorherzusagen, also, ob Wappen oder Zahlenbild geworfen wird. Spieler B hingegen denkt listig: „Ich werd‘ versuchen den Zufall auszutricksen“, und er hat folgenden Plan: Er sagt immer nur dann „Zahl“ voraus, wenn gerade zuvor „Wappen“ gefallen ist. Denn, so denkt er, es ist unwahrscheinlicher, dass 2-mal „Wappen“ hintereinander geworfen wird, als dass „Zahl“ fällt. Bei „Zahl“ sagt er nichts. - Die Frage ist nun in dieser Aufgabe: Hat er recht, und kann er auf diese Weise tatsächlich als Gewinner mit dem meisten Geld aus dem Spiel hervortreten? –
Zur Erläuterung: Für eine Beurteilung, ob Spieler A mit Gewinnen oder Verlusten das Spiel verlässt, genügt es, die Wahrscheinlichkeiten jedes vorausgesagten „Wappen“- oder „Zahl“-Wurfes zu berechnen. Nach dem Gesetz der großen Zahl gilt für jeden Münzwurf: $P(W)=\dfrac{1}{2}$ und $P(Z)=\dfrac{1}{2}$. Da beide Ausprägungen gleich wahrscheinlich sind, wird er in etwa gleich viele Treffer wie Fehlaussagen erzielen, und dies umso eher, je länger die Spieldauer ist. Spieler A wird demnach in etwa pari mit seinen Vorhersagen ausgehen und wohl sein eingesetztes Geld behalten.
Wie sieht das aber bei Spieler B aus, der den Zufall auszutricksen gedenkt? Seine Idee ist, dass dieselbe Merkmalsausprägung nur mit geringer Wahrscheinlichkeit mehrmals hintereinander ausfällt. Er denkt so: $P(W,W)=\dfrac{1}{4}$ (das ist nach der Produktregel die Wahrscheinlichkeit zweier gleicher Merkmalsausprägungen hintereinander), aber $P(Z)=\dfrac{1}{2}$, und damit wird er nach seiner Ansicht häufiger „Zahl“ erzielen und gewinnen. Stimmt das eigentlich?

Um zu einer genauen Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass auf „Wappen“ wieder „Wappen“ folgt, zu gelangen, müssen wir bedenken, dass der Gedanke von Spieler B nicht ganz vollständig ist. Es ist zwar richtig, dass zwei „Wappen“-Würfe hintereinan-

der unwahrscheinlicher als ein einzelner Wurf von „Zahl“ sind, aber woher weiß Spieler B denn, dass das Auftreten von zwei „Wappen“-Würfen hintereinander nicht auch Teil eines Auftretens von 3-, 4- und mehr Würfen des „Wappens“ hintereinander sein kann, was auch möglich ist? Für eine genaue Berechnung seiner Wahrscheinlichkeitsvorstellung müssten diese Fälle nämlich alle noch hinzuaddiert werden.
Es ist also zu bilden:

$$P(Gesamt) = P(W,W) + P(W,W,W) + P(W,W,W,W) + P(W,W,W,W,W) + ...$$

Das wären unendlich viele Glieder, wenn man das Gesetz der großen Zahl annimmt. Setzen wir die entsprechenden Werte ein, so ist

$$P(Gesamt) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + ... = \frac{1}{2},$$

gemäß der Produktregel, wie sie für mehrstufige Zufallsexperimente gilt, und dem Gesetz der großen Zahl bei unendlich vielen Gliedern.

Die Rechnung zeigt also, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der auf ein Wappen mindestens ein Wappen folgt, genauso hoch ist, wie die, mit der Spieler B ein Zahlenbild ($P(Z) = \frac{1}{2}$) erwarten würde.
Er wird aller Wahrscheinlichkeit nach ebenso pari aus dem Spiel mit seinen Einsätzen heraustreten wie Spieler A, der bei jedem Wurf setzt.

Die Berechnung dieses Zufallsexperiments zeigt erneut, dass sich der Zufall nicht austricksen lässt.