Prägnantes Beispiel einer Koordinatentransformation

Bernhard Blank

Veröffentlicht unter: www.didaktikmat2chem.de [1]

Kurzartikel G

Fassung 4.10

[1] Titel der Website: Erklärungen in Mathematik, Physik und Physikalischer Chemie

Prägnantes Beispiel einer Koordinatentransformation

Hier wird exemplarisch ein sehr einfaches und prägnantes Beispiel einer Koordinatentransformation vorgestellt und ausgeführt, aus welchen drei Teilen jede Koordinatentransformation besteht. Des Weiteren wird an diesem Beispiel demonstriert, wie beide Koordinatendarstellungen (vor und nach der Transformation) das gleiche Rechenergebnis ergeben.

Verwendete Begriffe: Definitionsbereich, Differentialausdruck, Einheitskreis, Integrationsgrenzen, Koordinatentransformation.

Bei der hier gewählten Koordinatentransformation (s. Abb. 1) soll eine Fläche A, die von den Punkten Q, U und B eingeschlossen wird, einmal mittels einer Koordinaten x und das andere Mal mittels des Winkels φ ausgedrückt werden. A hängt also zum einen nur von x mit $x = x_B$ ab ($A = A(x)$), s. Abb. 1a, und zum anderen nur von $\varphi = \varphi_B$ ($A = A(\varphi)$), s. Abb. 1b. Der Einfachheit halber wird die Berechnung am **Einheitskreis** durchgeführt. Es gilt damit einen Ausdruck $A(x)$ zu finden und diesen von x nach φ so umzuwandeln, dass ein Ausdruck $A(\varphi)$ entsteht. Dies stellt also unsere **Koordinatentransformation** dar und sie ist sogleich auch ein sehr einfaches Beispiel dafür.

Einen Ausdruck für die Fläche $A = A(x)$ erhält man durch Addition der Dreiecksfläche A_{QPB} und dem Integral unter der Kreisfunktion $f = f(x)$ in der Grenzen von x_B bis 1 bzw. allgemein von x bis 1 :

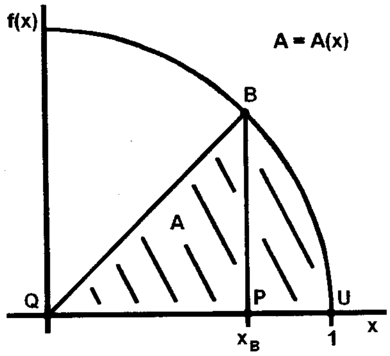

Abb. 1a

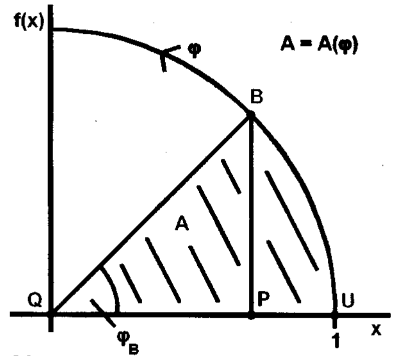

Abb. 1b

$$A(x) = A_{QPB} + \int_x^1 f(x)dx \qquad \textit{(G - 1)}$$

Mit $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ aus $x^2 + f(x)^2 = 1^2$ und $A_{QPB} = \frac{x}{2}\sqrt{1^2 - x^2}$ ergibt sich

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1^2 - x^2} + \int_x^1 \sqrt{1^2 - x^2}\,dx \;; \qquad \textit{(G - 2)}$$

$$\int_x^1 \sqrt{1^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]_x^1 =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\arcsin 1 - \left(\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right) = 0{,}7854 - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + 0{,}7854 - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}7854 - \frac{1}{2}\arcsin x \qquad \textit{(G - 3)}$$

Will man eine Koordinatentransformation von $A(x)$, s. *(G - 1)* , nach $A(\varphi)$ durchführen, so sind – und **das gilt allgemein für jede Koordinatentransformation** - immer drei Dinge zu beachten:

I. Der **Definitionsbereich** für das Dreieck A_{QPB} und die Funktion $f(x)$ der Koordinaten x ist in einen mit der Koordinaten φ umzuwandeln.
II. Der **Differentialausdruck** dx muss in einen Ausdruck, der die Größe $d\varphi$ enthält, überführt werden.
III. Die **Integrationsgrenzen** x und 1 sind durch die neuen Integrationsgrenzen φ und 0 zu ersetzen.

Insgesamt ergibt sich:

- Da $x = r\cos\varphi$, ist $x = \cos\varphi$ *(G - 4)*
  im Einheitskreis. Die Beziehung ist wichtig für die Umstellung des Definitionsbereichs.

- Die Koordinate x steht mit der Koordinaten φ über $x = \cos\varphi$ in Beziehung, also gilt $x = g(\varphi) = \cos\varphi$. Da man folglich auch $\frac{dg(\varphi)}{d\varphi}$ bilden kann, erhält man

$$\frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow dx = -\sin\varphi d\varphi \qquad \textit{(G - 5)}$$

- Die neuen Integrationsgrenzen gehen statt von x bis 1 von φ bis 0

Daraus folgt mit *(G-2)* , $A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \int_x^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, durch Einsetzen für $A(\varphi)$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi} + \int_x^1 \sqrt{1-\cos^2\varphi} \cdot -\sin\varphi d\varphi$$

Mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ gilt

$$A(\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \int_x^1 -\sin^2\varphi d\varphi$$

und unter Berücksichtigung der neuen Integrationsgrenzen

$$A(\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \int_\varphi^0 -\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \int_0^\varphi \sin^2\varphi d\varphi \;;$$

$$\int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos\varphi \sin\varphi \right]_0^{\varphi} = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\Rightarrow A(\varphi) = \frac{1}{2} \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow A(\varphi) = \frac{\varphi}{2} \qquad \textit{(G - 6)}$$

Wählt man für $x_B = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so entspricht dies einem φ_B von $\varphi_B = 45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}$ (es gilt $360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$) .

$$\Rightarrow A(x_B) = 0,7854 - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,3927 \qquad \textit{(G - 7)}$$

und $$A(\varphi_B) = \frac{\pi}{2 \cdot 4} = 0,3927 \qquad \textit{(G - 8)}$$

Da die Ausdrücke *(G - 7)* und *(G - 8)* denselben Wert für die Fläche A ergeben, ist unsere Koordinatentransformation offensichtlich richtig (was aber kein Beweis sein soll).

Den Ausdruck $A(\varphi) = \frac{\varphi}{2}$ hätte man natürlich ebenso gut aus

$$\frac{A(2\pi)}{2\pi} = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{A(\varphi)}{\varphi} \Leftrightarrow A(\varphi) = \frac{\varphi}{2} \quad \text{für } r = 1 \qquad \textit{(G - 9)}$$

herleiten können, doch sollte hier das allgemeine Prinzip, wie es durch die Punkte I. – III. für eine Koordinatentransformation wiedergegeben wird, demonstriert werden.

Man sieht sehr gut, dass der Ausdruck $A(\varphi)$ *(G - 6)* schon etwas Einfacheres als der Ausdruck $A(x)$ *(G - 3)* darstellt und manchmal fallen diese Unterschiede noch um einiges größer aus. <u>Daher werden Koordinatentransformationen eingesetzt, um mathematische Sachverhalte auf diese Weise einfacher zu formulieren, wie sie u.a. in der Physik angewandt werden.</u> Diese Sachverhalte werden dadurch sogar manchmal überhaupt erst lösbar.
Eine **Anwendung** wäre die Berechnung des H-Atoms in der Quantenmechanik, bei der eine Transformation von kartesischen Koordinaten in sphärische Polarkoordinaten vorgenommen wird, womit die dabei auftretende Differentialgleichung schließlich lösbar wird.